

Fénysebesség mérése rezonanciával

1. Bevezetés

A fénysebesség egyike az univerzális állandóknak, jelenleg ezért alapállandónak tekintjük, és értékét az SI mértékegység-rendszer $c=299\,792\,458\text{ m/s}$ -ban **definiálja**. Az SI mértékegységrendszer ma már a távolság alapegységét a fénysebesség állandó voltára alapozva, annak felhasználásával határozza meg. Erre természetesen csak azután tettek javaslatot, miután kísérletek sokasága bizonyította, hogy az elektromágneses sugárzás terjedési sebessége vákuumban állandó. Ezekben a kísérletekben az ős-méterre alapozott távolságskálát használták. A jelen mérés célja egy hasonló fénysebesség meghatározás hosszúság és idő mérésére visszavezetve: a mérés során egy egyszerű LC rezgőkör sajátfrekvenciája alapján határozzuk meg a fénysebességet.

Már a Maxwell-egyenleteket tartalmazó értekezésben Maxwell a fénnyt az elektromágneses hullám formájában képzelte el. Erre az is alapot adott, hogy 1873-ban Foucault által forgótükörrel mért fénysebessége ($c=298360000\text{ m/s}$) nem esett messze a Weber és Kohlrausch 1856-ban alapján, elektromos és mágneses mérésekből meghatározott $c=310740000\text{ m/s}$ értéktől.

Tekintsük most át a fénysebesség meghatározásának gondolatmenetét: egy egyszerű síkkondenzátor és egy egyszerű légmagos tekercs induktivitásának meghatározásán keresztül.

Ha egy A felületű, egymástól d távolságra levő lemezpárra Q töltést viszunk fel, akkor a két lemez közötti térerősség értéke a Gauss-tétel segítségével könnyen kiszámítható:

$$E = \sigma/\epsilon_0 = 1/\epsilon_0 Q/A$$

Innen a feszültségkülönbség:

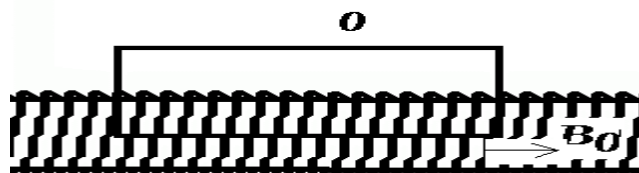
$$U = E d = \sigma/\epsilon_0 d = 1/\epsilon_0 d Q/A$$

A Q töltés és az U feszültségkülönbség aránya megadja a kondenzátor kapacitását:

$$C = \epsilon_0 A/d \tag{1}$$

Ez a képlet természetesen csak vákuumban igaz – a jelen mérésben azonban elhanyagolhatjuk a két lemez közötti levegő hatását (Miért tehetjük ez meg?).

Egy l hosszúságú, r sugarú hengerre elhelyezett, hosszegységenként n átlagos menetszámú légmagos tekercs induktivitásának meghatározásához tegyük fel, hogy a tekercsben I áram folyik. A tekercs belsejében a mágneses indukció értékét az Ampère-törvény alapján kaphatjuk meg:



Integráljunk az ábrán látható kontúrra! Ha feltesszük, hogy a mágneses tér értéke a tekercsen kívül 0, belül pedig B_0 , akkor azt kapjuk, hogy a körintegrál értéke $B_0 l$, mivel a két, a tekercs tengelyére merőleges szakasznak nincs járuléka. A hurkon átfolyó teljes áramerősség viszont NI , azaz

$$B_0 = \mu_0 N I \quad I = \mu_0 n I$$

A tekercs inductivitását könnyen megkaphatjuk, ha tudjuk, hogy az I árammal átjárt tekercs mágneses terében tárolt energia megegyezik $I^2 L/2$ -vel, azaz

$$\mu_0^{-1} B_0^2 V/2 = \mu_0 (n I)^2 \pi r^2 l/2 = I^2 L/2$$

, innen

$$L = \pi \mu_0 r^2 n^2 l \quad (2)$$

(a képletben csak a tekercs $V = \pi r^2 l$ térfogatát vettük figyelembe).

Ez a képlet természetesen csak vákuumban igaz – a jelen mérésben azonban elhanyagolhatjuk a tekercsben lévő levegő hatását (Miért tehetjük ez meg?).

Készítsünk rezgőkört a kondenzátorral és a tekercssel! A rezgőkör rezonanciafrekvenciája (illetve egy periódus rezgésideje) az előzőek alapján könnyen megkapható:

$$2\pi f = (LC)^{-1/2} = (\pi r^2 n^2 l / (\mu_0 \epsilon_0) A/d)^{-1/2} = (\pi r^2 n^2 l A/d)^{-1/2} (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \quad (3)$$

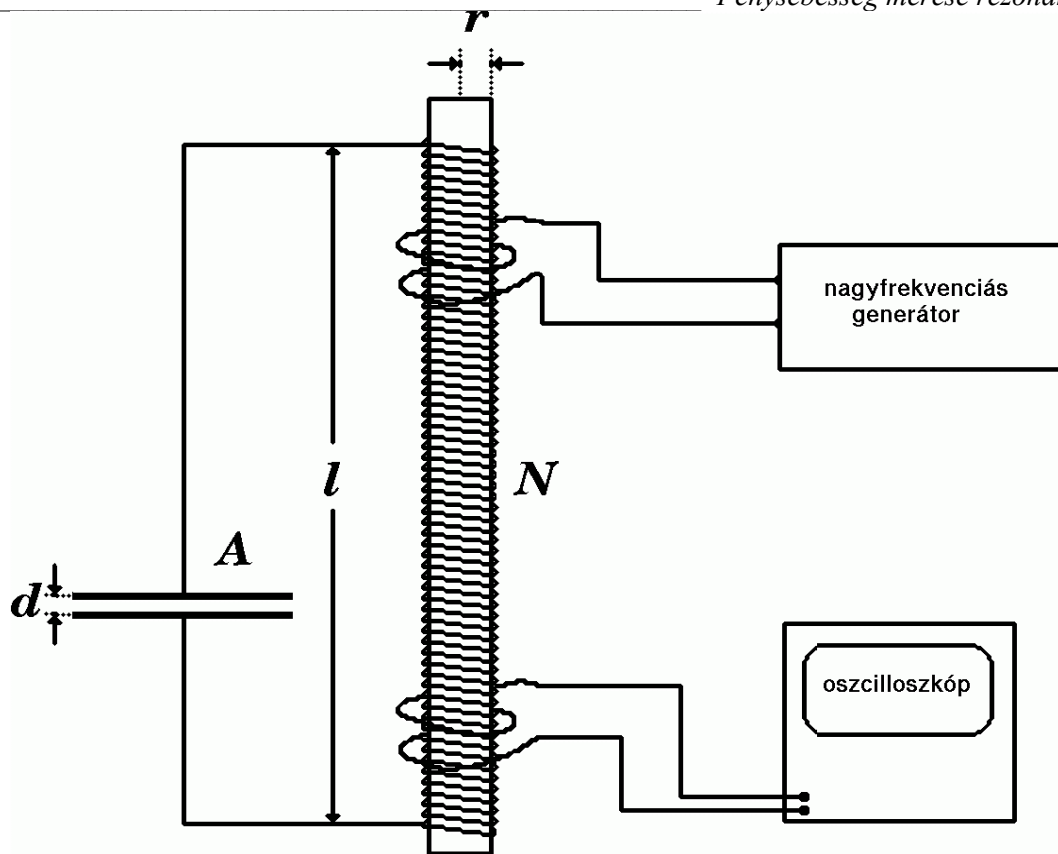
Átrendezve:

$$(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = (4 \pi^3 r^2 n^2 l A/d)^{1/2} / T \quad (4)$$

Látható módon az egyenlet három tagot tartalmaz: egy T rezgésidőt (ami pl. oszcilloszkóppal mérhető), egy távolság dimenziójú $(4 \pi^3 r^2 n^2 l A/d)^{1/2}$ tagot, ami a geometriai méretekből meghatározható, valamint egy sebesség dimenziójú állandó mennyiséget $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$, amely megadja az elektromos és a mágneses változások terjedésének sebességet – ez pontosan az a fénysebesség, amit keresünk! Rezgőkörünkben az energia részben az inductivitás mágneses terében, részben a kapacitás elektromos terében tárolódik. Az $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ mennyiség azt adja meg, hogy ezek a térrészek mennyire gyorsan tudnak kiürülni ill. feltöltődni – a jelen mérési elrendezésben a vezetékeken történő késleltetés elhanyagolható (miért tehetjük meg ezt?)!

2.A kísérleti elrendezés

A mérési elrendezés az ábrán látható: a generátor jelét induktív módon csatoljuk a szolenoidra, és szintén induktív módon detektáljuk a maximumot az oszcilloszkóppal. Ez az elrendezés minimalizálja az oszcilloszkóp és a generátor hatását a rezgőkörre. (Milyen hatással kellene számolni a direkt csatolás esetén?)



A mérés során két síkkondenzátort használunk, méreteik:

$$A_1 = (200 \pm 1) \times (250 \pm 1) \text{ mm}^2 \quad d = 1.55 \pm 0.05 \text{ mm}$$

, valamint

$$A_2 = (100 \pm 1) \times (250 \pm 1) \text{ mm}^2 \quad d = 1.45 \pm 0.05 \text{ mm}.$$

A tekercs 915 mm-es hosszában 1255 menetet tartalmaz, a véget is beleértve összesen 19 leágazási pontban (a nagy jelölések 100 menetszámonként vannak), sugara $r = 20 \pm 0.2 \text{ mm}$.

A C kapacitás meghatározásakor elhanyagoltuk a széleket – itt a térerősség nem lesz homogén. A pontos értékhez a geometria ismerete, valamint differenciálegyenletek pontos numerikus megoldása kellene. A számunkra érdekes pontossággal megkapható a korrekció, ha a lapok méretét a köztük lévő távolság $3/8$ részével megnyújtjuk (l. Feynmann: Mai fizika, 58.10 fejezet).

Pontosítsuk most az induktivitás (2)-es képletét, és vegyük figyelembe a tekercs végének hatását is! A tekercs mindkét végén a szétnyíló B erővonalaknál a B^2 teljes feltételre vett térfogati integrálját helyettesítsük egy olyan, a $B_{\text{homogén}}$ teret tartalmazó henger alakú térfogattal, amely keresztmetszete megegyezik a tekercs keresztmetszetével, magassága pedig αr . Az α értéke adott geometria esetén pontosan megkapható a mágneses tér (az Ampère-törvény által jól meghatározható) eloszlása alapján. Hosszú, vékony tekercsek esetén jó közelítéssel feltételezhetjük, hogy az α állandó. Az α érték valójában nem paraméter, hiszen értéke pl. numerikus integrálással megkapható, de most tekintsük ezt is a mérésből meghatározandó (illesztendő) mennyiségnek. A tekercs induktivitásának kiszámolásakor az előzőek alapján a $\pi r^2 l$ térfogat mellé így figyelembe kell vennünk mindkét végre egy-egy effektív $\alpha \pi r^3$ térfogatot is. Így az induktivitás pontosabban az

$$L = \pi \mu_0 r^2 n^2 (l + 2\alpha \pi r)$$

értékkel lesz közelíthető.

3. Feladatok

- 1.) Az $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ mennyiség azt adja meg, hogy ezek a térrészek mennyire gyorsan tudnak kiürülni ill. feltöltődni – a jelen mérési elrendezésben a vezetékeken történő késleltetés elhanyagolható. Miért tehetjük meg ezt?
 - 2.) A mérési elrendezésben a generátor jelét induktív módon csatoljuk a szolenoidra, és szintén induktív módon detektáljuk a maximumot az oszcilloszkóppal. Miért nem közvetlenül csatoljuk a generátorhoz és az oszcilloszkóphoz a szolenoidot?
 - 3.) Adja meg a korrekciókkal a módosított (3)-as képletet, valamint a benne található numerikus paramétereket SI mértékegység rendszerben és adja meg hibájukat (vagy vegye a szélsőséges eseteket, ha még nem tanult hibaszámolást)! A képletben csak A , d , n , l , valamint c és α szerepelhet! Mivel a két kondenzátort összesen 4 féle képpen köthetjük a tekercsre (külön-külön, sorosan és párhuzamosan), ezért mind a 4 lehetőséget vegye figyelembe:
 - 4.) A tekercsnek is vannak szórt kapacitásai. Először mindenféle kondenzátor és vezeték nélkül keresse meg ezeket a jellemző rezonancia frekvenciákat (lokális maximumok) a 100 kHz- 10MHz tartományban, és adja meg a tipikus frekvencia és (amplitúdó/generátor amplitúdó) értékeket ezeken a helyeken:
 - 5.) A két kondenzátort összesen 4 féle képpen köthetjük a tekercsre (külön-külön, sorosan és párhuzamosan). Minden egyes kondenzátorváltozatnál mérje meg minden tekercsleágazásnál a rezonanciafrekvenciát (tipikusan a 100 kHz- 400 kHz tartományban), és adja meg a frekvenciát és annak becült pontosságát/hibáját. (Érdemes a mérést X-Y üzemmódban végezni, és keresni a $\pi/2$ fázistoláshoz tartozó pontot – miért ezt? Fejtse ki bővebben!)
 - 6.) Ismerve a geometriai paramétereket és a frekvenciát, illeszthetjük az összefüggést minden egyes esetben. Végezze el az illesztéseket a **gnuplot** program segítségével! Használja pl. a
`fit fv(x) "adat.dat" using 1:2:3 via c,alpha`
alakot, ahol az $fv(x)$ függvényt a c és $alpha$ paraméterek szerint illesztjük az *adat.dat* állományból az 1. (x értékek) és a 2. ($fv(x)$ értékek) oszlopához, úgy, hogy a 2. oszlop mérési pontossága/hibája a 3. oszlopban van megadva. Minden egyes illesztést nyomtasson ki, és csatolja a jegyzőkönyvhöz!
- Adja meg mind a négy esetben a kapott (illesztett) c és α értékeket, hibájukkal együtt:
- 7.) Átlagolja ki a négy mérést és adja meg a c értéket hibájával együtt:
- Mit tud mondani az α értékeiről és hibájáról?
- 8.) Mekkora a rezgőkörök jósági tényezője a mérés során használt legkisebb és legnagyobb frekvencián? Mekkora a veszteségi ellenállás tipikus értéke? Mit mondhat a rezgőkör frekvenciájának elhangolódásáról?