Korrelációs fügvények

Hasonlóság mértéke $\Rightarrow$ a két függvény szorzatának integrálja
Időbeli változások esetén lehet vizsgálni a hasonlóságot a τ relatív időkülönbség szerint:
Keresztkorrelációs függvény:

$$R_{12}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_1(t)v_2(t-\tau)dt$$

ill. periódikus jelekre:

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} v_1(t)v_2(t-\tau)dt$$

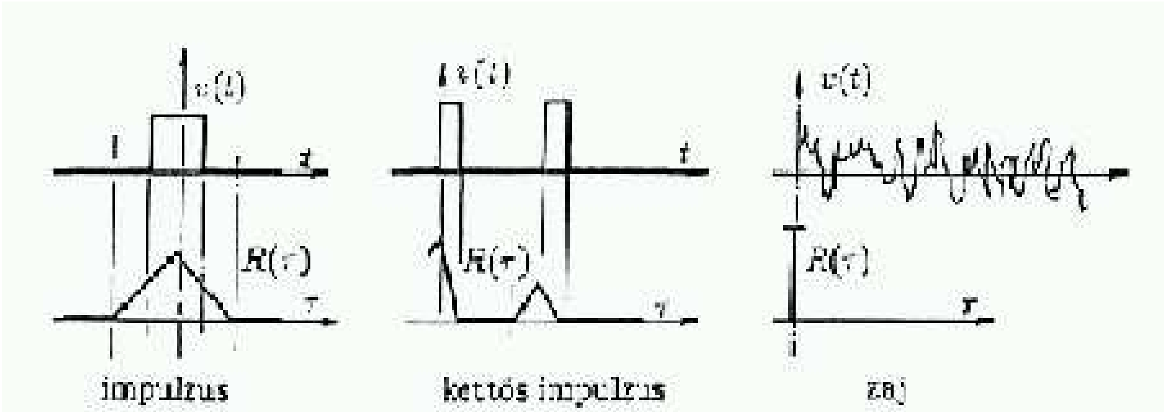
Mennyire hasonlít egy függvény saját magára? Ez az autokorrelációs függvény.

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v(t-\tau)dt$$

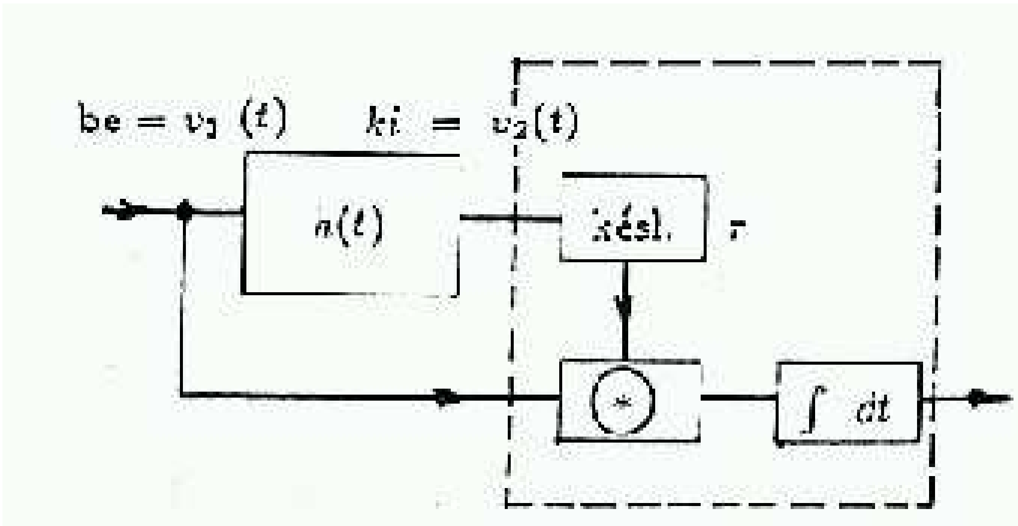
Tulajdonságai:

- $R(\tau) = R(-\tau)$
- $R(0) \approx \int v^2(t)dt$ („energia"),
- $R(0) > R(\tau) \quad , \tau > 0$
- két függvény összegének autokorrelációs függvénye nem a két függvény autokorrelációs függvényének összege
- az autokorrelációs függvényből nem lehet az eredeti függvényt visszakapni.
- zajban eltemetett jeleket is lehet észlelni (pl. pulzárok, MMR)

Az autokorrelációs függvény néhány jel esetén:


v(t)
t
R(τ)
τ
impulzus
v(t)
t
R(τ)
τ
kettős impulzus
v(t)
R(τ)
τ
zaj

Átviteli függvény vizsgálata korrelációs fügvényekkel



Ha $R_{12}(\tau)$ lényegesen rövidebb időtartamú, mint $h(t)$, (azaz a bemenőjel zajszerű és az autokorrelációs függvénye impulzusszerű)
Kimeneten $h(t)$ jelenik meg:

$$v_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) v_1(t + \tau - \vartheta) d\vartheta$$

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) v_1(t + \tau - \vartheta) d\vartheta dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} v_1(t) v_1(t+\tau-\vartheta)\, dt\, d\vartheta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) R_1(t-\vartheta)\, d\vartheta
\end{aligned}
$$

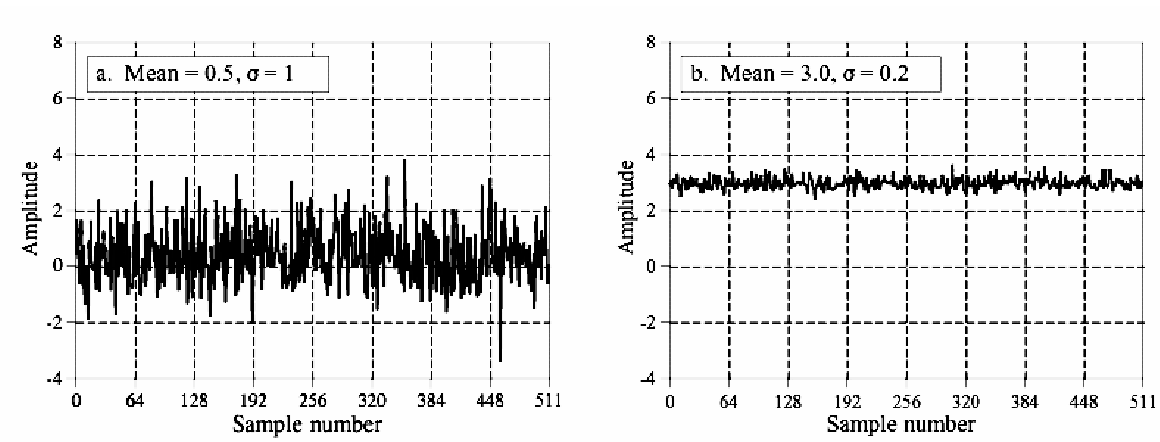
Alkalmazás: vezérelt rendszerek, pl. nukleáris reaktorok.

Kérdések, feladatok

- Hogyan fog kinézni egyetlen periódusidig tartó szinuszhullám autokorrelációs függvénye?
- Miért nem lehet visszakapni az autokorrelációs függvényből az eredeti függvényt?
- Keressen két olyan - "szemre" nagyon eltérő - függvényt, amelyeknek azonos az autokorrelációs függvénye.
- Hogyan lehetne a keresztkorrelációs függvényt elállítani a két függvény frekvencia-spektrumából?
- Van-e valamilyen kapcsolat a keresztkorreláció és a konvolúció között?

Eloszlásfüggvény és társai..

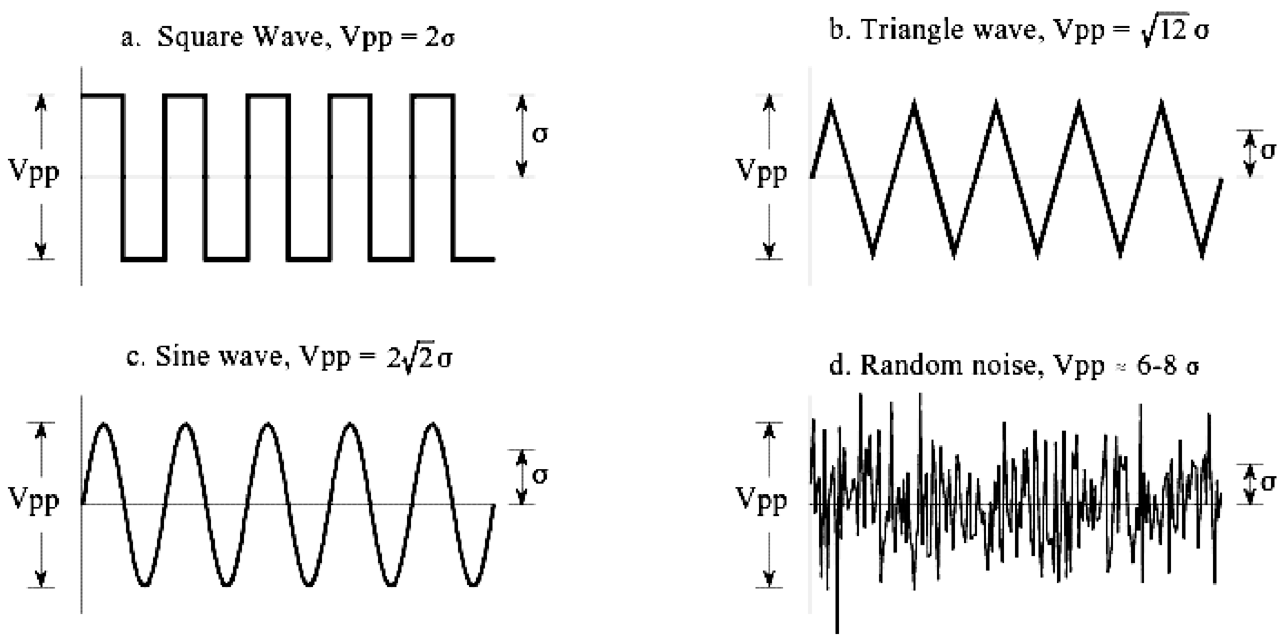
Folytonos vagy mintavett jelek:
Átlag és szórás:



Átlag és szórás:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i \\
\sigma^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i-\mu)^2 \\
&= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

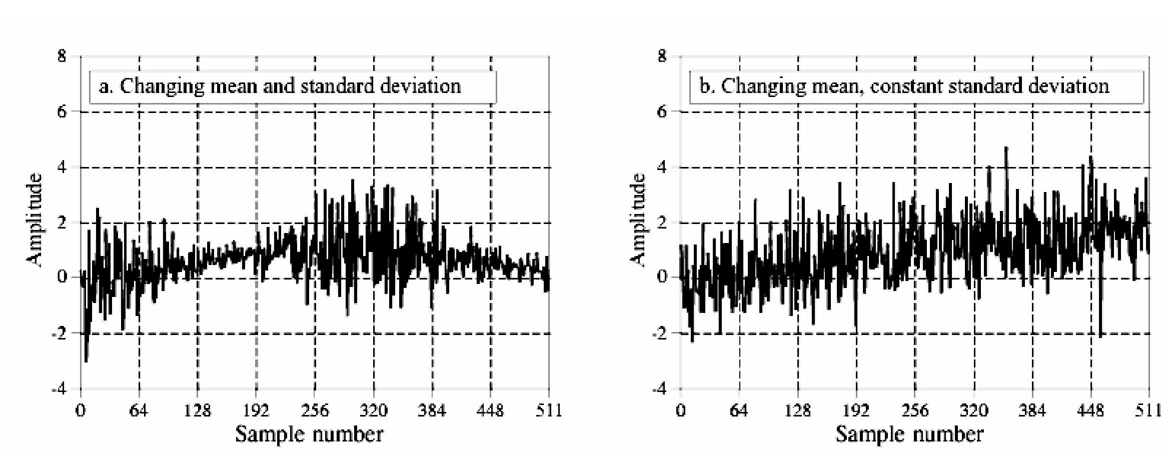
numerikus problémák....



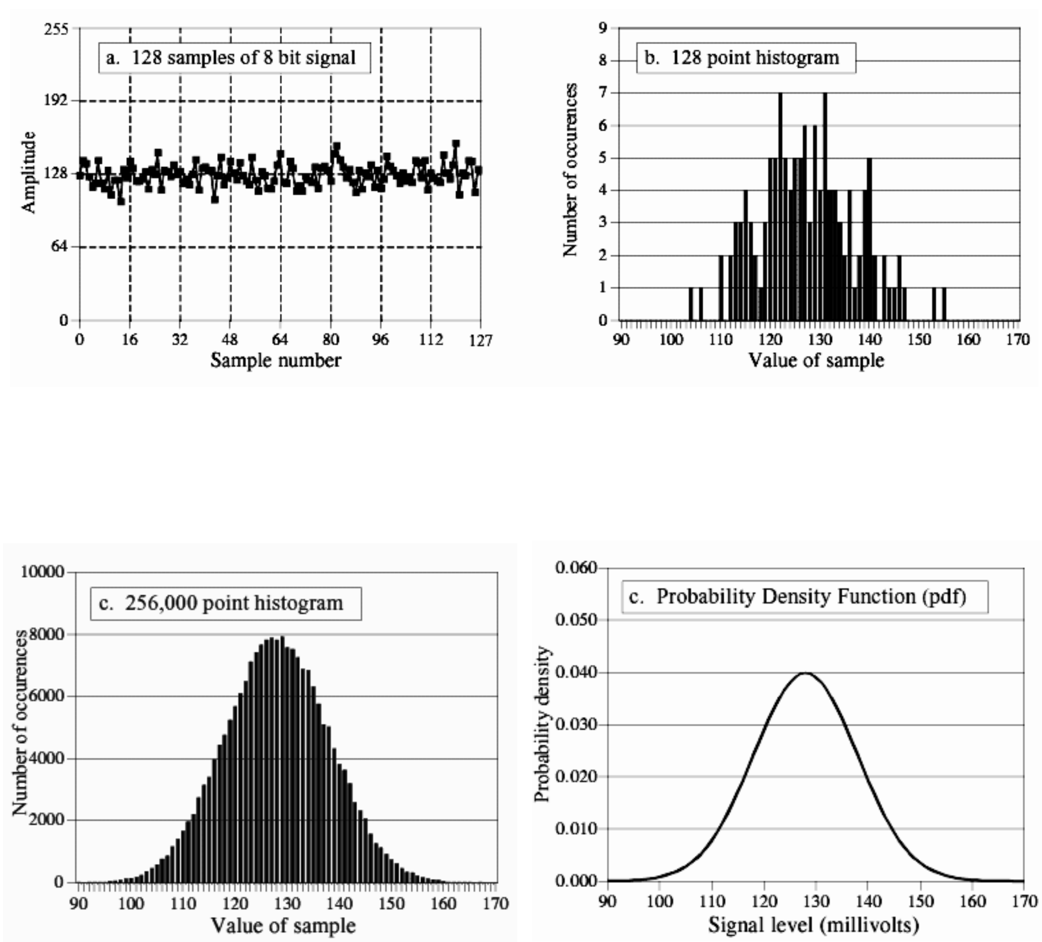
N darab mérés esetén:

$$\sigma \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

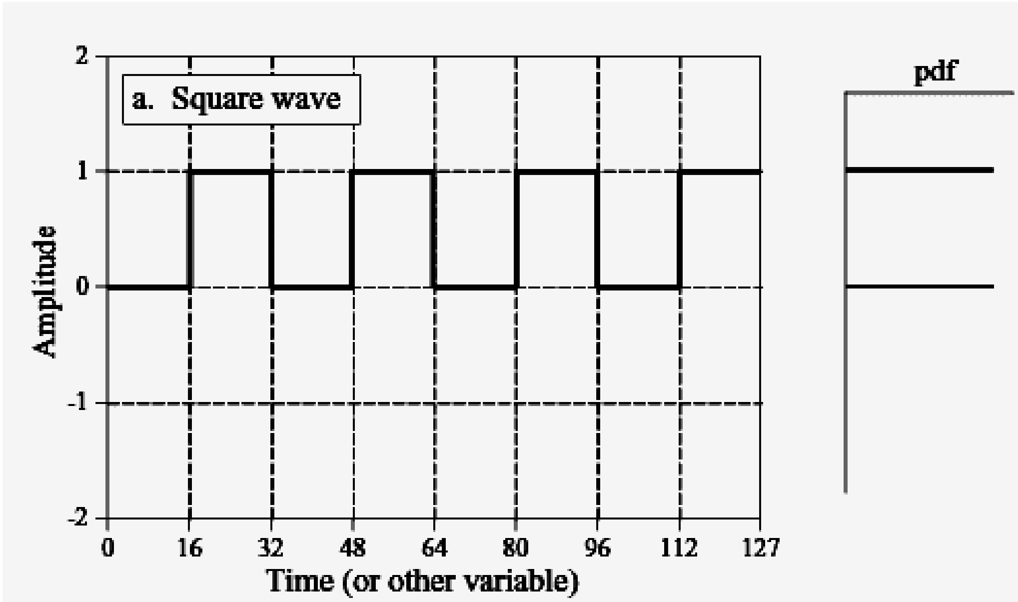
Sok mérés $\longrightarrow$ kicsi szórás , ha stacioner a folyamat:

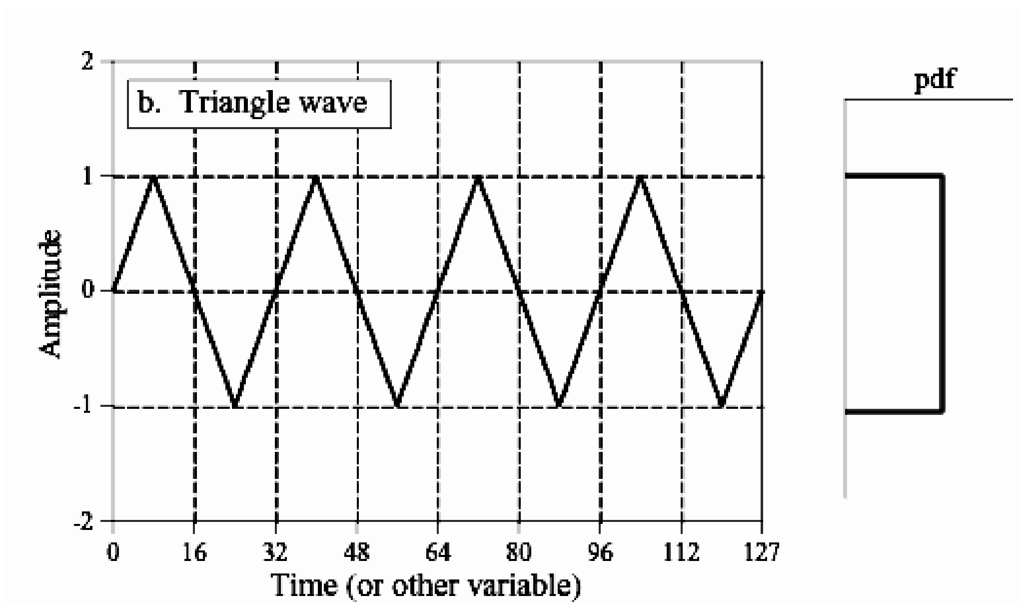


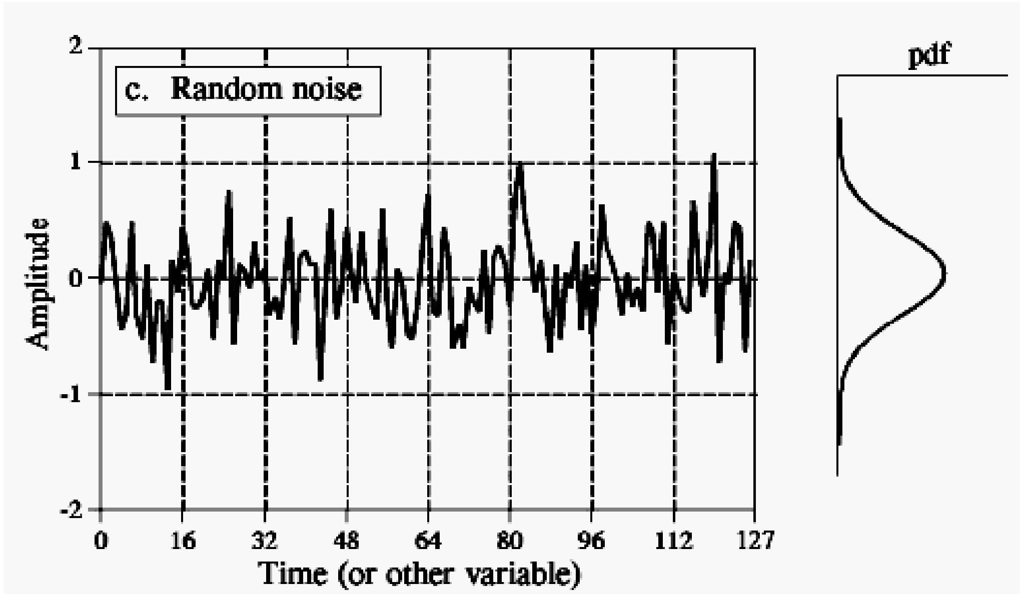
Sok mérés $\longrightarrow$ folytonos eloszlás:
Valószínűségi sűrűségfüggvény:



Néhány példa:


a. Square wave
pdf
Amplitude
2
1
0
-1
-2
0
16
32
48
64
80
96
112
127
Time (or other variable)


b. Triangle wave
pdf
Amplitude
2
1
0
-1
-2
0
16
32
48
64
80
96
112
127
Time (or other variable)


c. Random noise
Amplitude
Time (or other variable)
pdf
2
1
0
-1
-2
0
16
32
48
64
80
96
112
127

Normál/Gauss eloszlás

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\imath}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Átlag és szórás tökéletesen leírja:

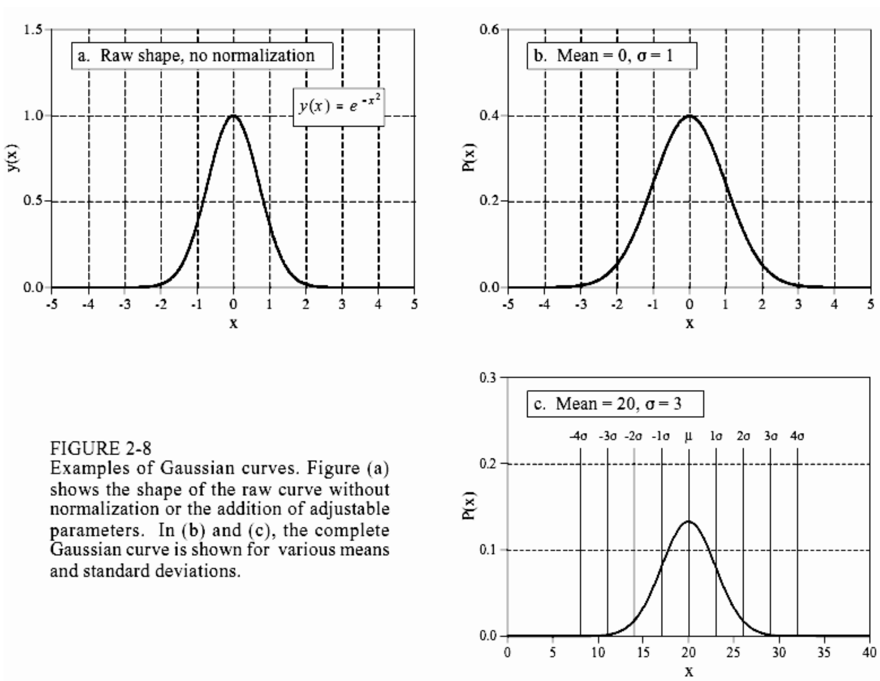


FIGURE 2-8
Examples of Gaussian curves. Figure (a) shows the shape of the raw curve without normalization or the addition of adjustable parameters. In (b) and (c), the complete Gaussian curve is shown for various means and standard deviations.

Akármilyen eloszlásból sok összege ide vezet!!!

Valós esetben: problémák a doboz/bin mérettel:

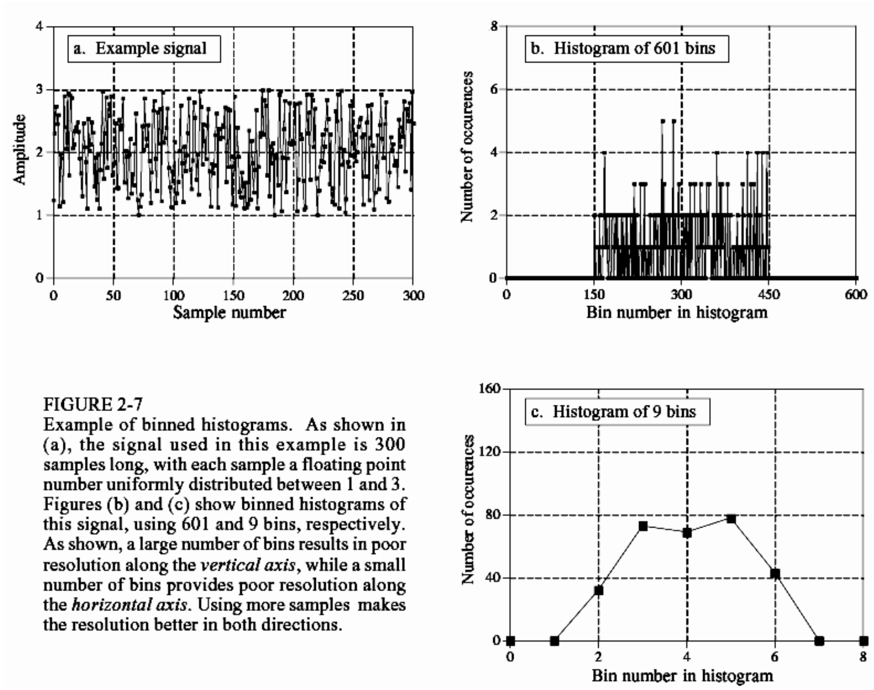
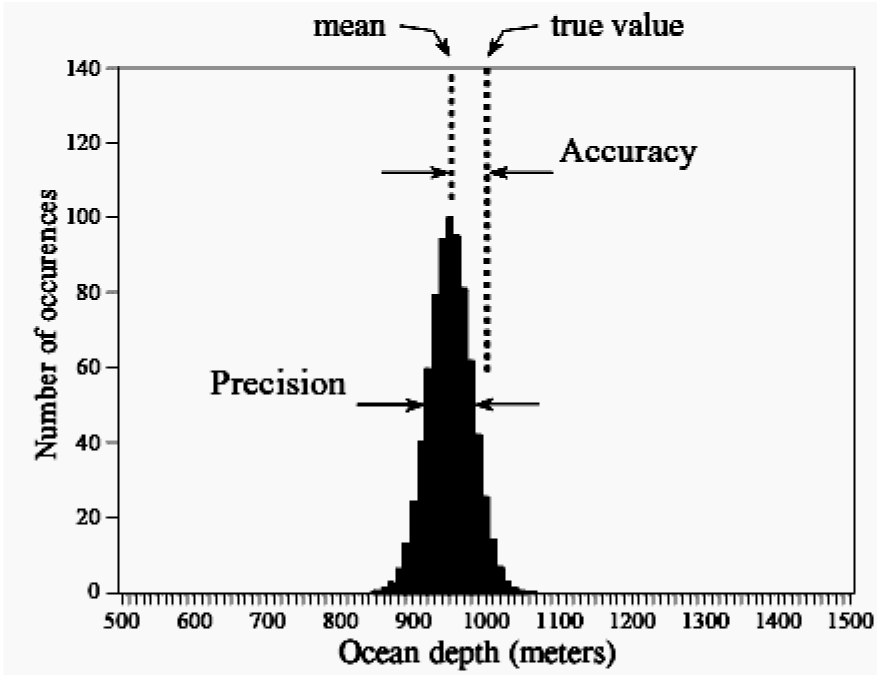


FIGURE 2-7
Example of binned histograms. As shown in (a), the signal used in this example is 300 samples long, with each sample a floating point number uniformly distributed between 1 and 3. Figures (b) and (c) show binned histograms of this signal, using 601 and 9 bins, respectively. As shown, a large number of bins results in poor resolution along the *vertical axis*, while a small number of bins provides poor resolution along the *horizontal axis*. Using more samples makes the resolution better in both directions.

Sokszor a kumulatív (összegzett) eloszlás segít.

Szisztematikus (accuracy) és statisztikus (precision) hiba:


mean
true value
Accuracy
Precision
Number of occurences
140
120
100
80
60
40
20
0
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
Ocean depth (meters)

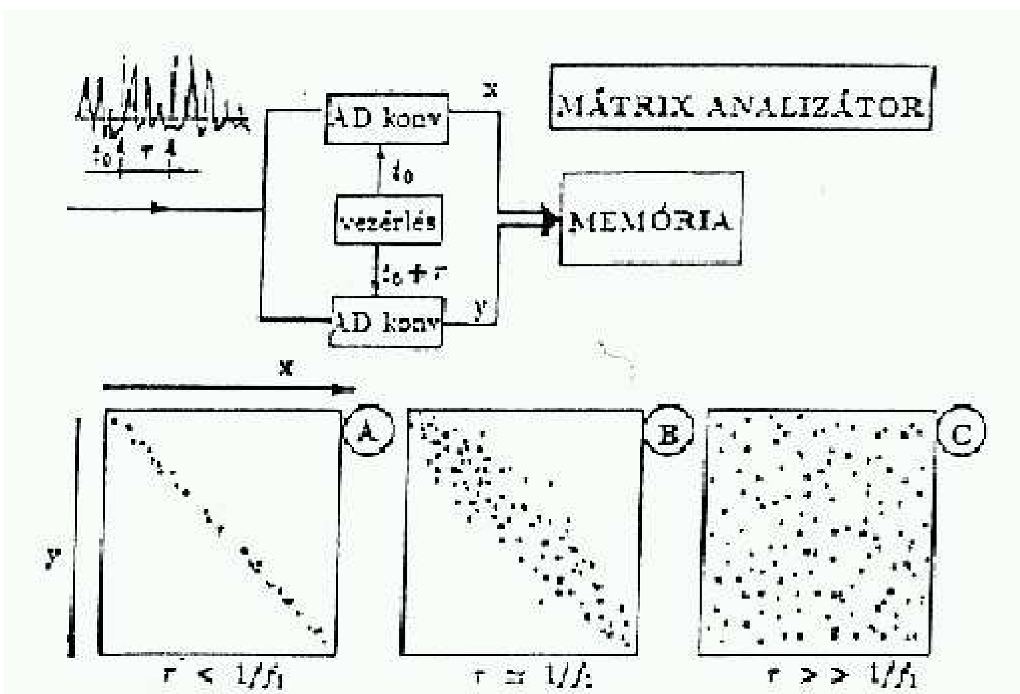
Véletlenszerű jelek autokorrelációs függvényei

Stacioner és ergodikus: ha az időbeli átlag és a sokaság átlag megegyezik.

Véletlenszerű folyamatok: $p(x)dx$ sűrűség-függvény

Együttes sűrűségfüggvény, τ késleletés mellett vizsgálunk egy második mintát is: $p(x, y, \tau)dxdy$

Mátrixanalizátor:



Bemeneten f_1 határfrekvenciájú feherzaj:

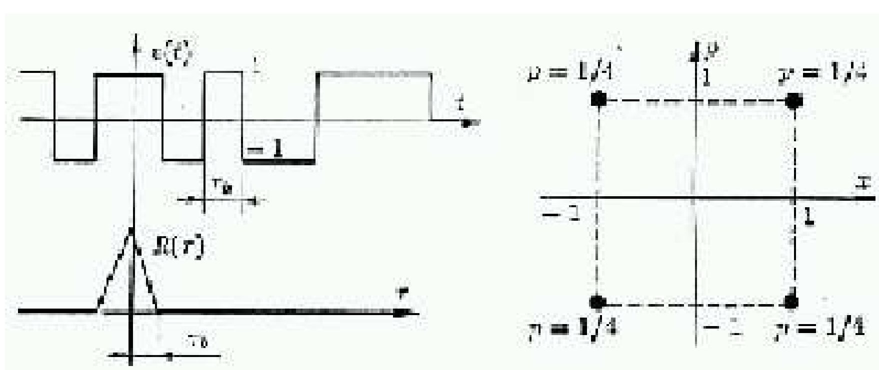
- $\tau << 1/f_1$ van $x-y$ korreláció, a zaj minimális
- $\tau \approx 1/f_1$ még van $x-y$ korreláció, de a zaj jelentős
- $\tau >> 1/f_1$ nincs $x-y$ korreláció, csak zaj

Az együttes sűrűségfüggvényből megkapható az $R(\tau)$:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y, \tau)dxdy$$

xdx és ydy adja a függvényértékeket, $p(x, y, \tau)$ az integrálási súlyt.

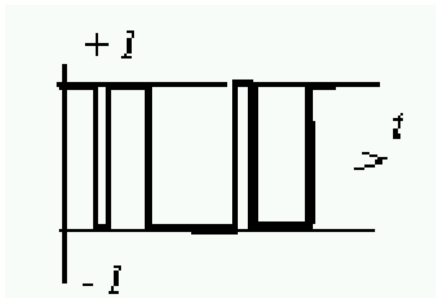
Pénzdobálás τ_0 időközönként:



$$
\begin{aligned}
R(\tau) &= 1 \cdot 1 \cdot p(1,1) + 1 \cdot (-1) \cdot p(1,-1) + (-1) \cdot \\
&\quad (-1) \cdot p(-1,-1) + (-1) \cdot 1 \cdot p(-1,1) \\
R(\tau) &= 0
\end{aligned}
$$

Csak a τ_0-n belül van autokorreláció!

Véletlen távírójel



Az átmenetek *Poisson statisztika* szerint következnek be
τ idő alatt k pontosan esemény valószínűsége:

$$p(k,\tau) = \frac{1}{k!}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^k e^{-\tau/t_0}$$

Az autokorrelációs függvény:

$$\begin{aligned}
R(\tau) &= p(\text{páros számú átmenet}) - p(\text{páratlan számú átmenet}) \\
&= \sum_{k=ps} \frac{1}{k!}(\frac{\tau}{t_0})^k \cdot e^{-\frac{\tau}{t_0}} - \sum_{k=ptlan} \frac{1}{k!}(\frac{\tau}{t_0})^k \cdot e^{-\frac{\tau}{t_0}} \\
& \quad e^{-\frac{t}{t_0}} \Big\{ \sum_{k=ps} \frac{1}{k!}(\frac{\tau}{t_0})^k - \sum_{k=ptlan} \frac{1}{k!}(\frac{\tau}{t_0})^k \Big\} \\
R(\tau) &= e^{-2\frac{\tau}{t_0}}
\end{aligned}$$

Az autokorrelációs függvényből nem lehet az eredeti függvényt visszakapni
Információveszteség!

Energiaspektrum és autokorrelációs függvénye

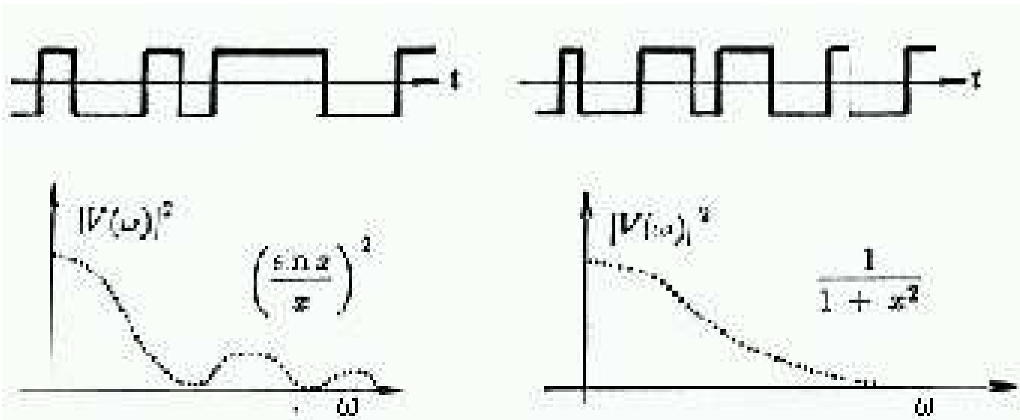
Wiener-Hincsin tétel (Parseval azonosság, fluktuáció-disszipáció tétel) :

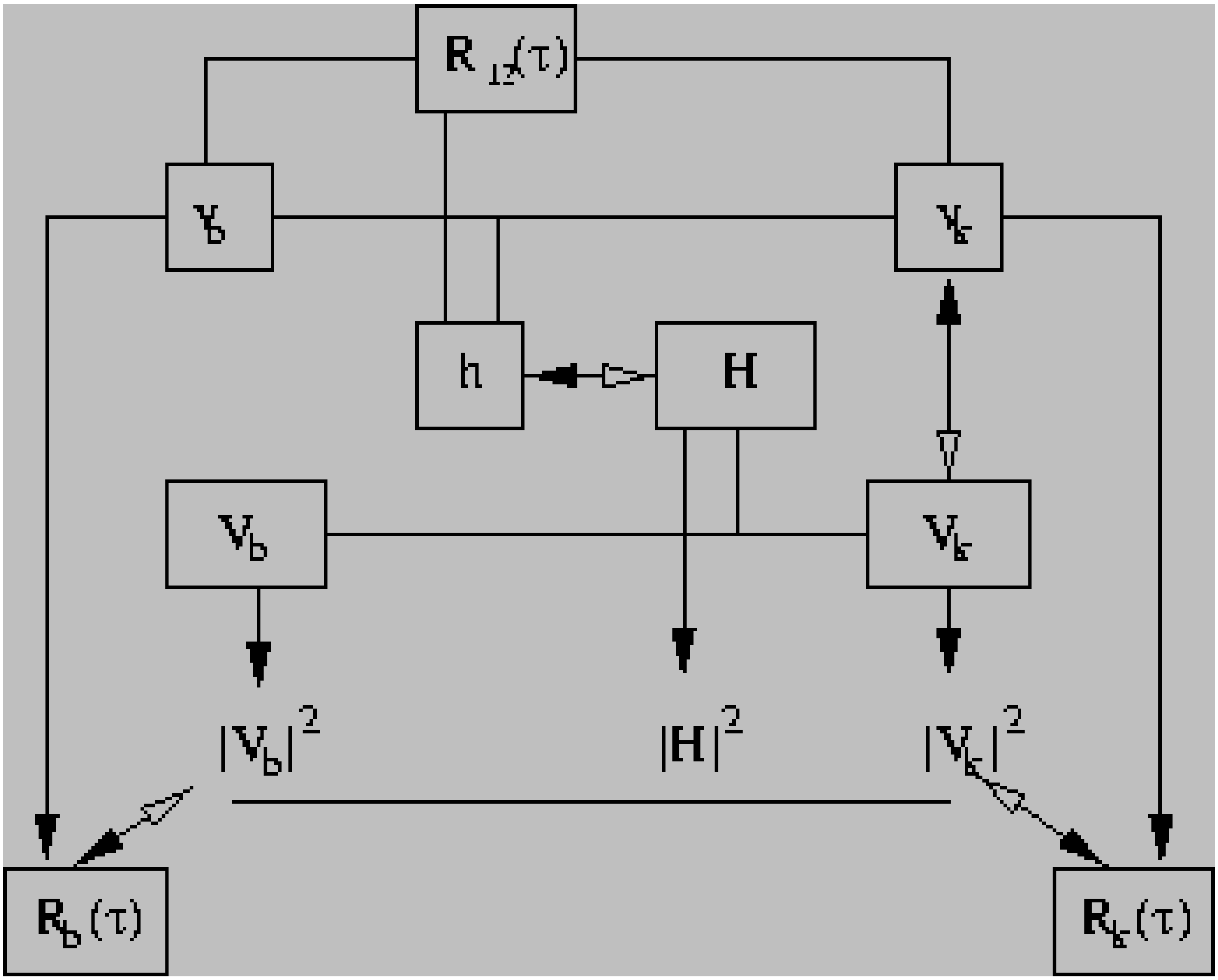
$$
\begin{aligned}
|V(\omega)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}td\tau \\
R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |V(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega
\end{aligned}
$$

B TONR esetén:

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{v\in B}\langle x, v\rangle^2$$

Különböző jelek - azonos energiaspektrum
pl. RC aluláteresztő hálózaton az ideális impulzusra kapott válaszjel energiaspektruma megegyezik egy fehér zaj hatására létrejövő kimenőjel energiaspektrumával


t
t
$|V(\omega)|^2$
$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$
ω
$|V(\omega)|^2$
$\frac{1}{1+x^2}$
ω

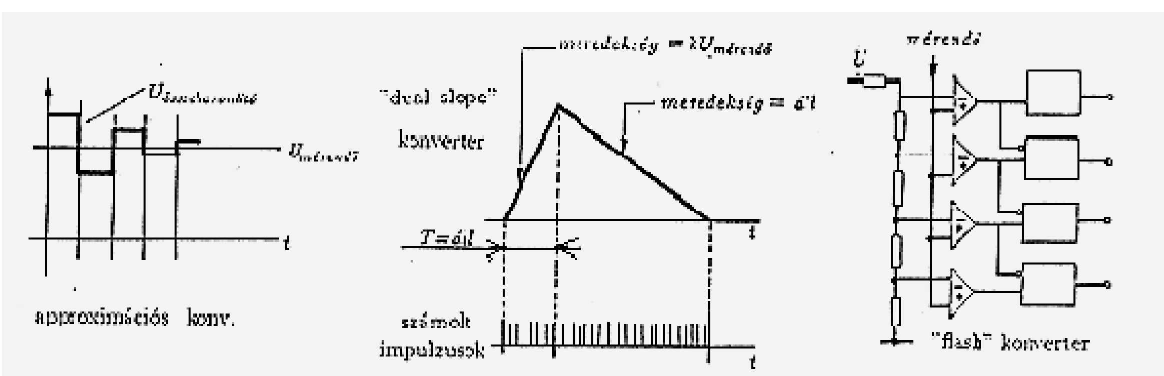


Mérhető, vizsgálható	Bemenet	Kimenet
Frekvenciakarakterisztika	Szinuszos generátor változatható frekvenciával	Amplitúdó és fázismérő
Súlyfüggvény	(Ideális) impulzust adó jelforrás	Időfüggvényt rögzítő e pl. oszcilloszkóp
Súlyfüggvény	Szélessávú zajforrás	Korrelátor (komputer)

- négyszögfüggvény Fourier transzformáltja sin(x) / x alakú. Természetesen ez visszafelé is igaz, négyszög alakú átviteli görbe az időtartományban sin(x) / x-et eredményez;
- a Gauss-görbe alakváltoztatás nélkül transzformálható ide, oda;
- periodikus időbeni impulzussorozat a frekvenciatartományban is periodikus impulzussorozat lesz (ez nagyon fontos, ezt a tényt többször kihasználjuk);
- a koszinusz függvényből két spektrumvonalat kapunk.

AD átalakítók

- szukcesszív approximációs konverter
- kettős meredekségű (dual slope) konverter
- „flash” konverter



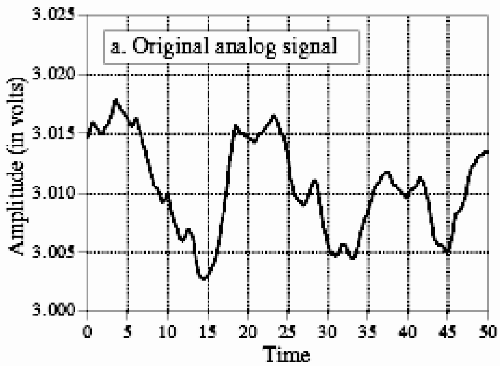
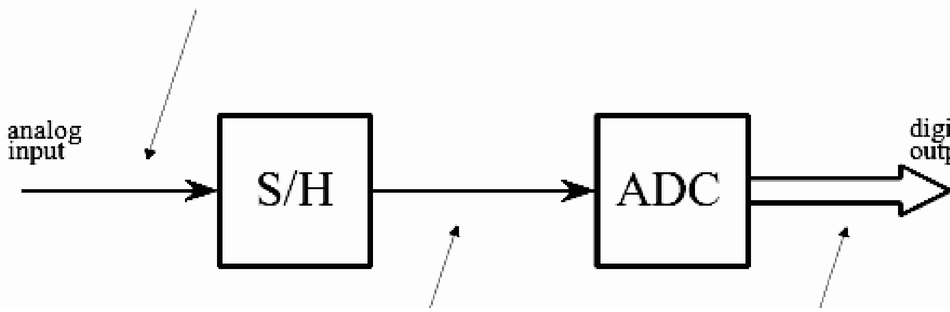
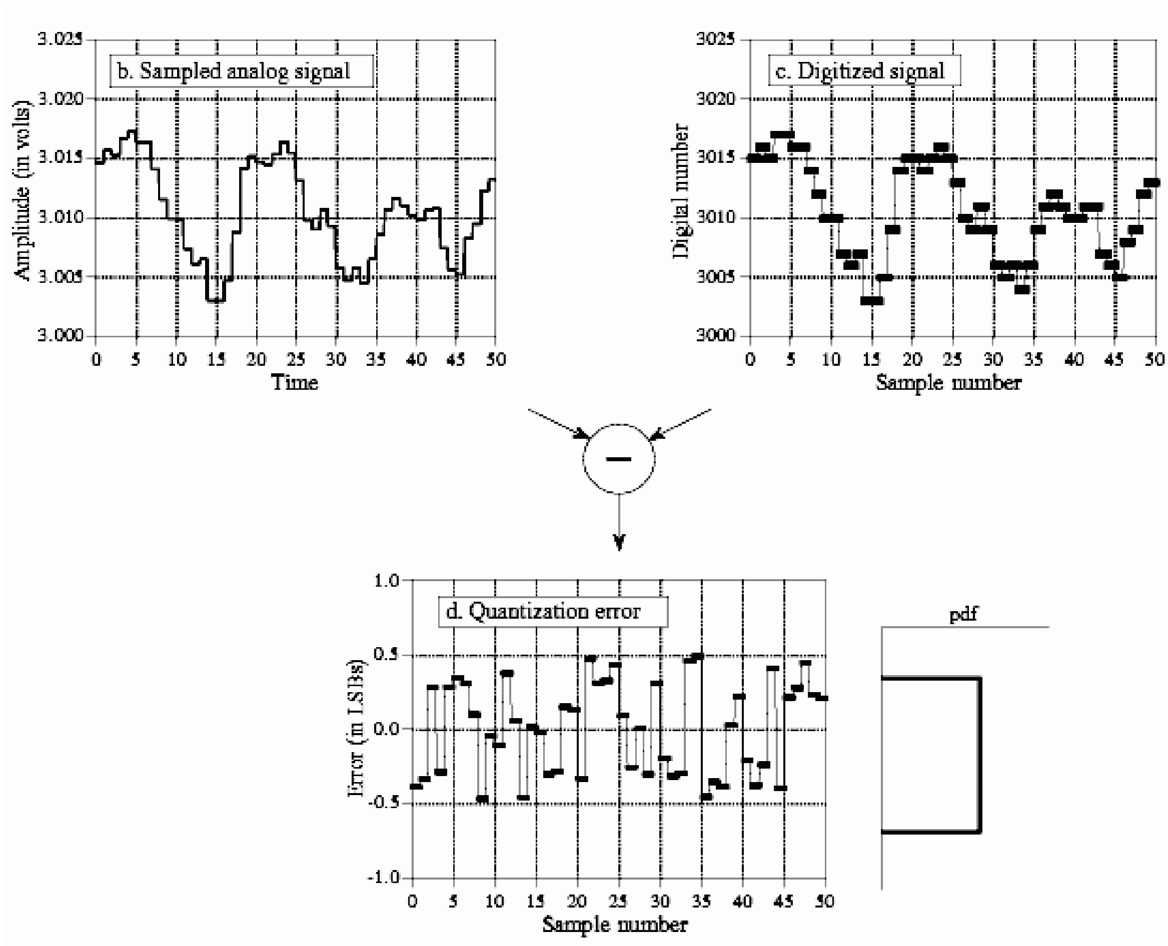
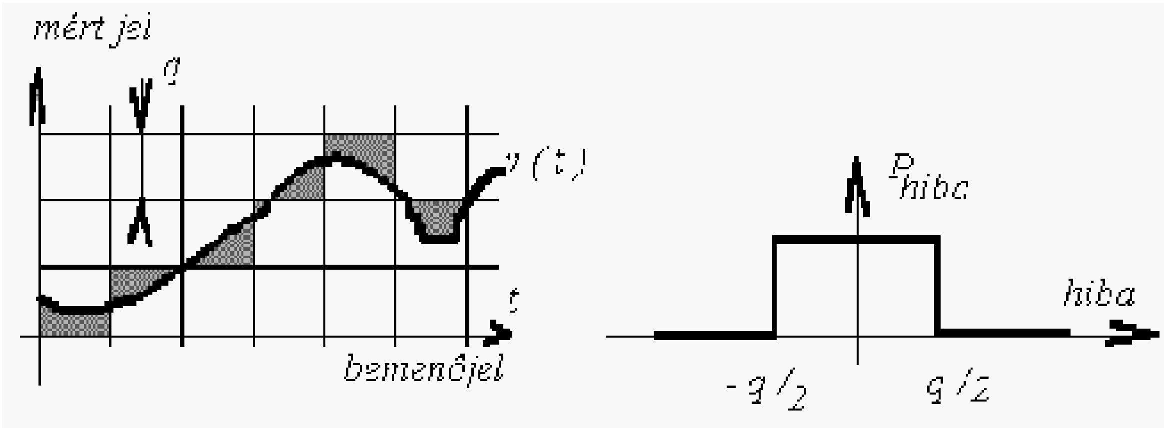


FIGURE 3-1
Waveforms illustrating the digitization process. The conversion is broken into two stages to allow the effects of *sampling* to be separated from the effects of *quantization*. The first stage is the sample-and-hold (S/H), where the only information retained is the instantaneous value of the signal when the periodic sampling takes place. In the second stage, the ADC converts the voltage to the nearest integer number. This results in each sample in the digitized signal having an error of up to ±½ LSB, as shown in (d). As a result, quantization can usually be modeled as simply adding noise to the signal.





Kvantálási zaj: > 4 bit esetén már fehérzajjal közelíthető



A kvantálási hibát fel lehet használni lassan változó jelek pontosabb visszaállítására (dithering!) :

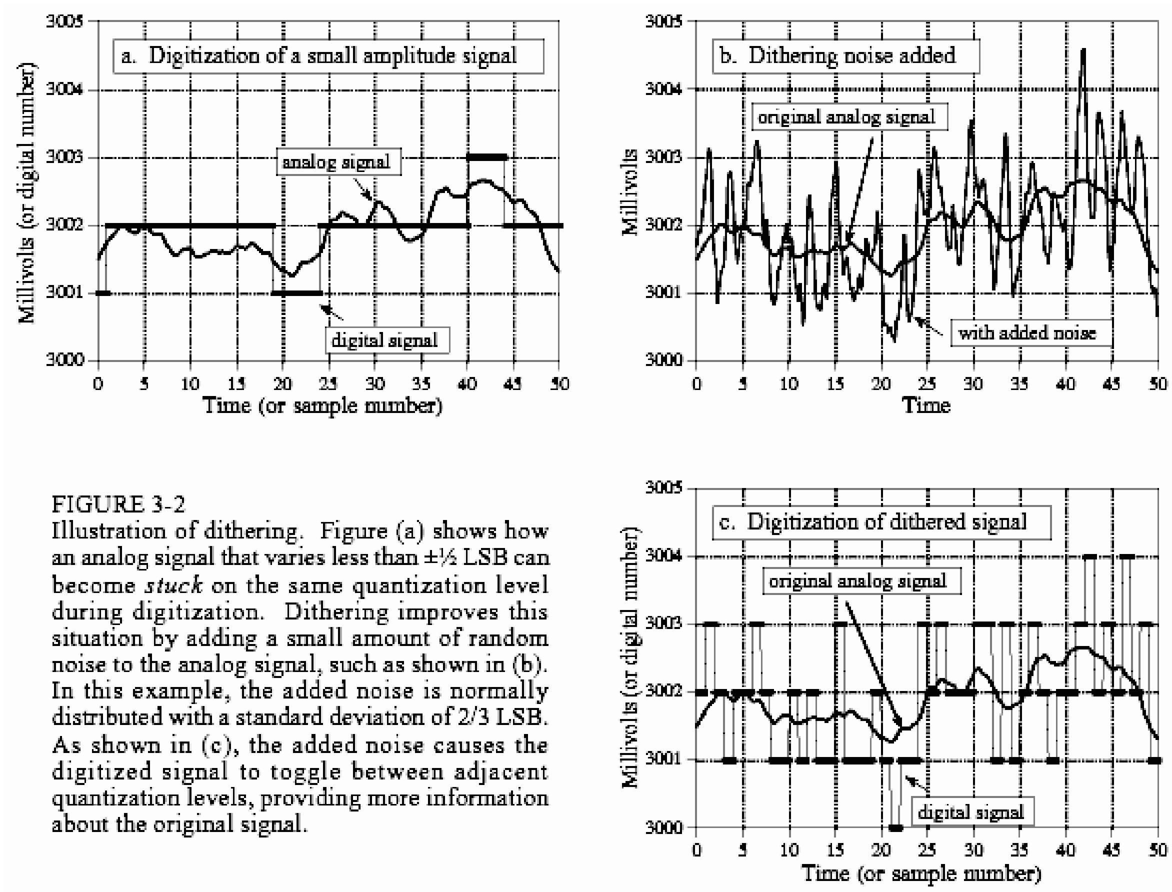


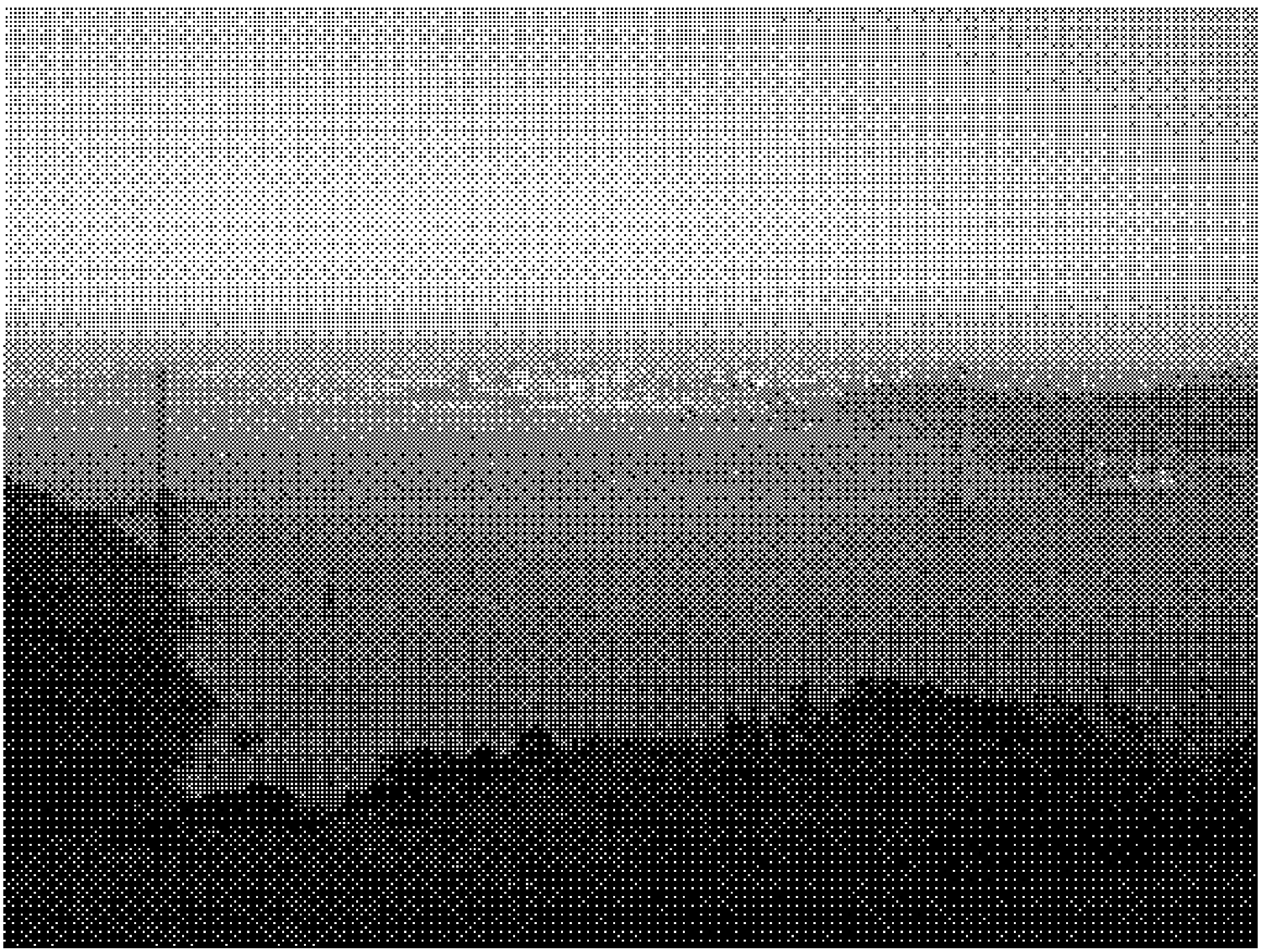
FIGURE 3-2
Illustration of dithering. Figure (a) shows how an analog signal that varies less than ±½ LSB can become *stuck* on the same quantization level during digitization. Dithering improves this situation by adding a small amount of random noise to the analog signal, such as shown in (b). In this example, the added noise is normally distributed with a standard deviation of 2/3 LSB. As shown in (c), the added noise causes the digitized signal to toggle between adjacent quantization levels, providing more information about the original signal.

Pl. szürke képek nyomtatása:
Eredeti:

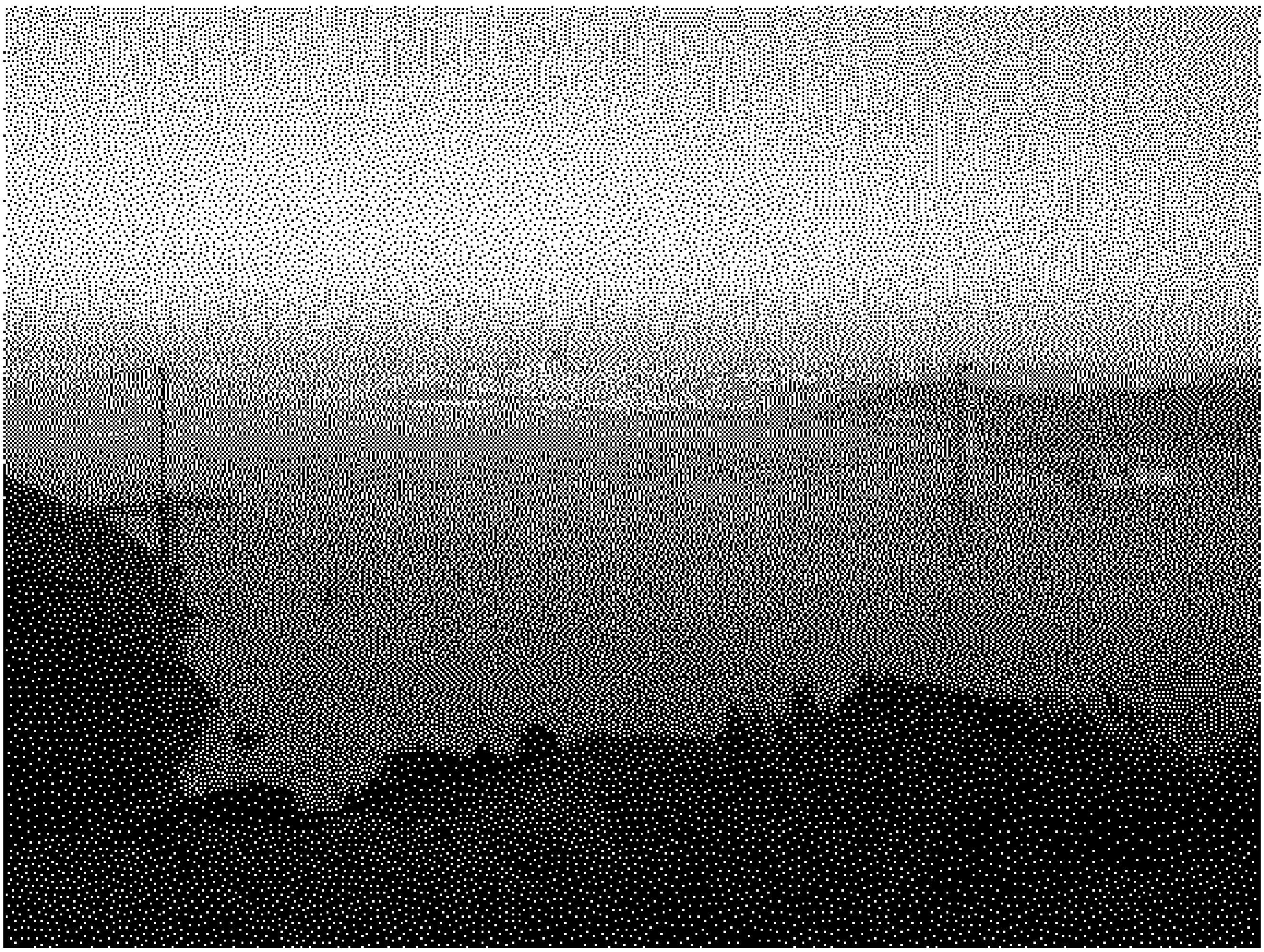
2 bites kvantálás:

cluster4 eljárás:

dither8 eljárás:



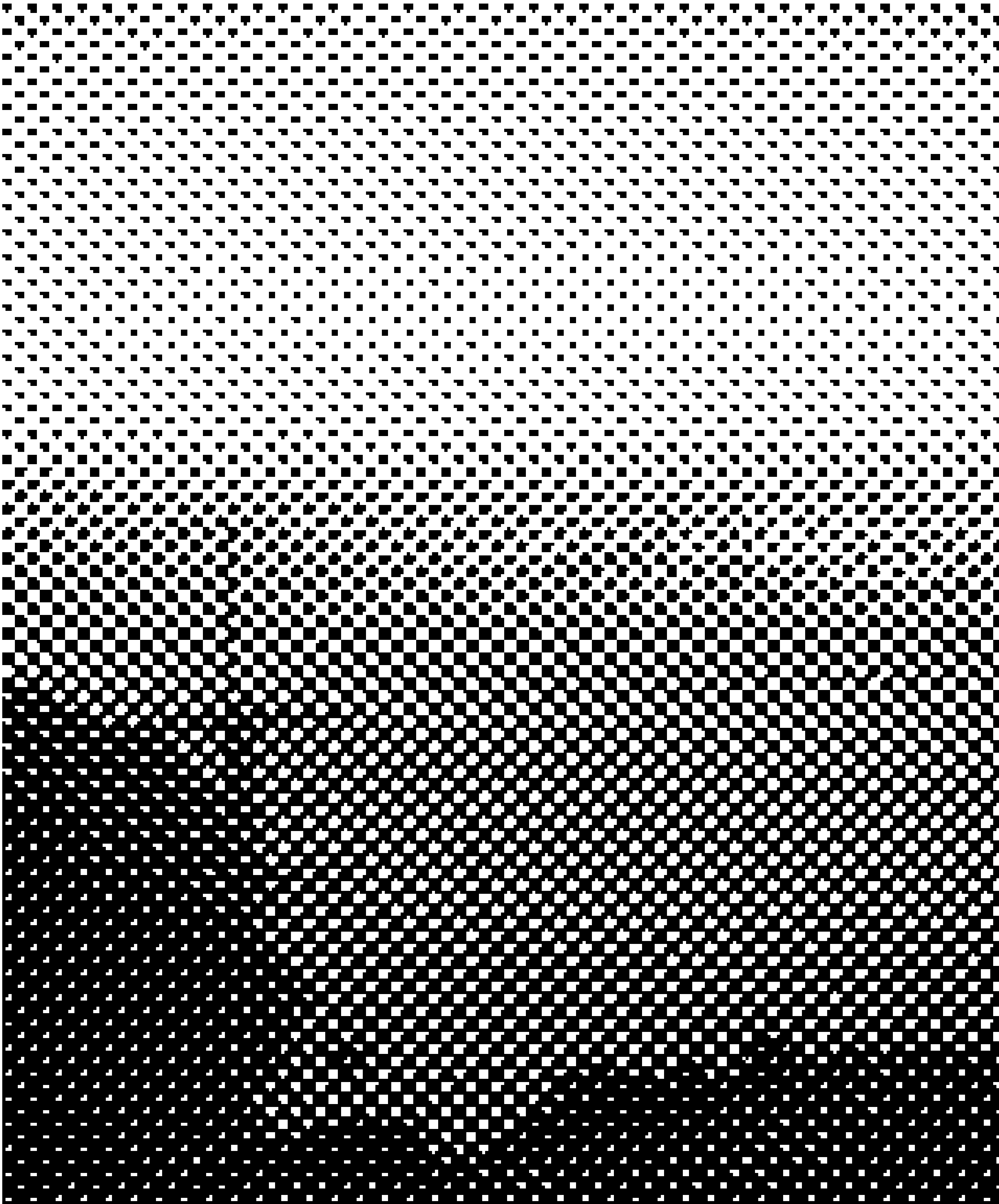
Floyd-Sternberg eljárás (nemlineáris!):



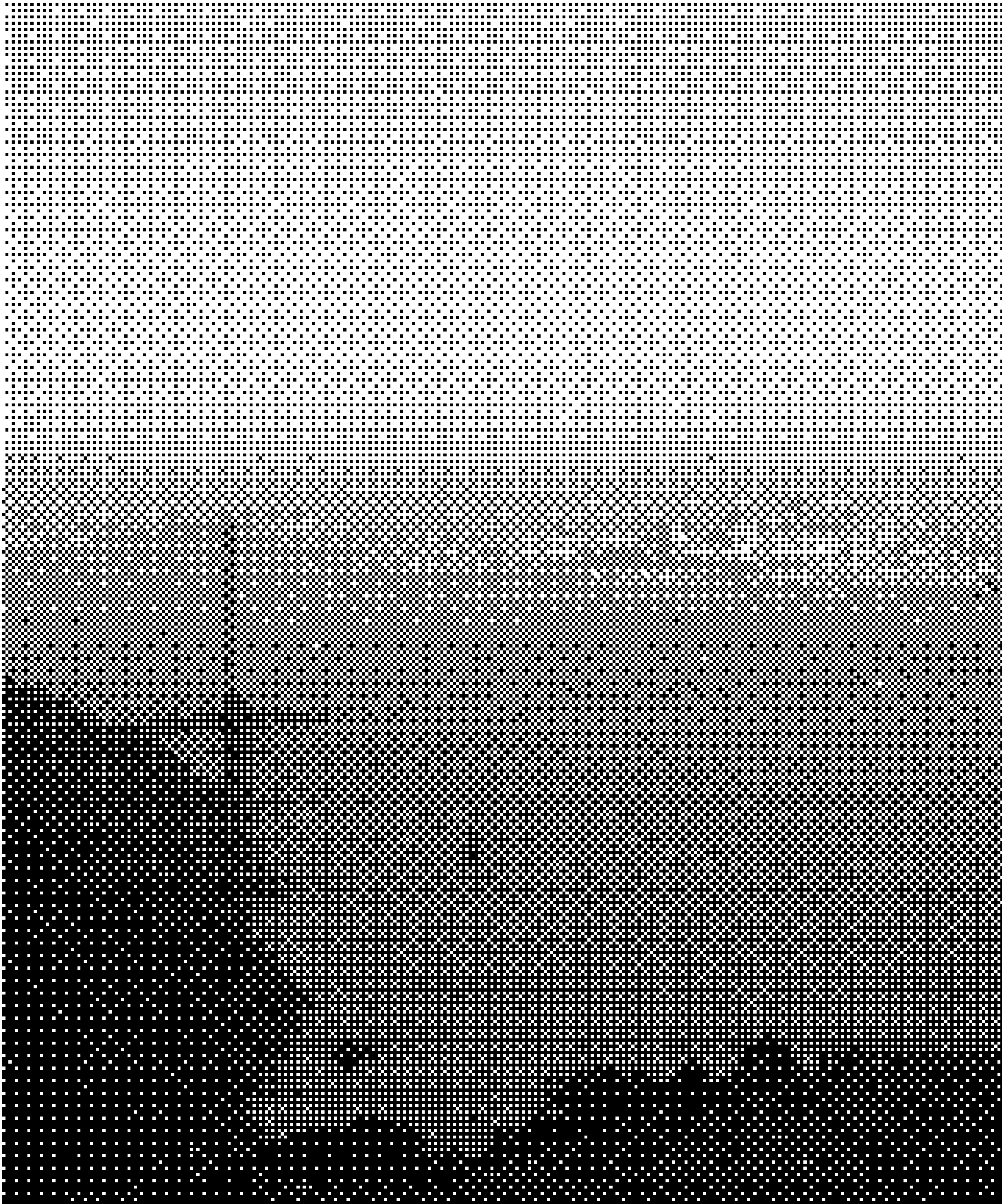
Eredeti:

2 bites kvantálás:

cluster4 eljárás:



dither8 eljárás:



Floyd-Sternberg eljárás (nemlineáris!):