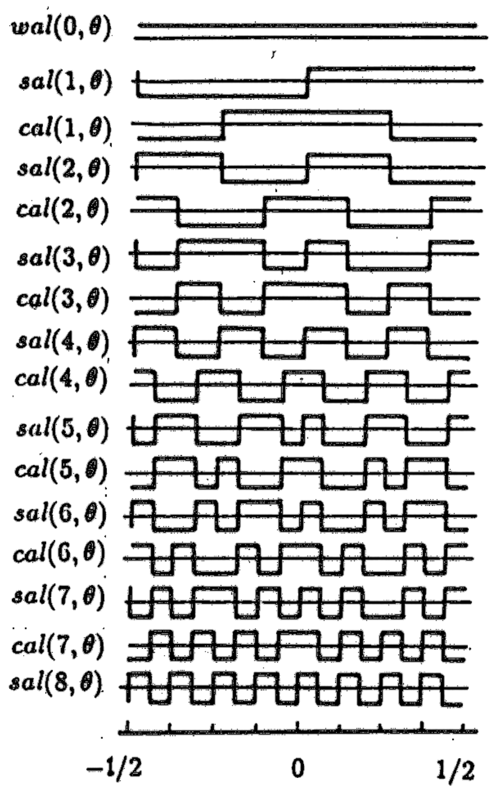
Wavelet transzformáció

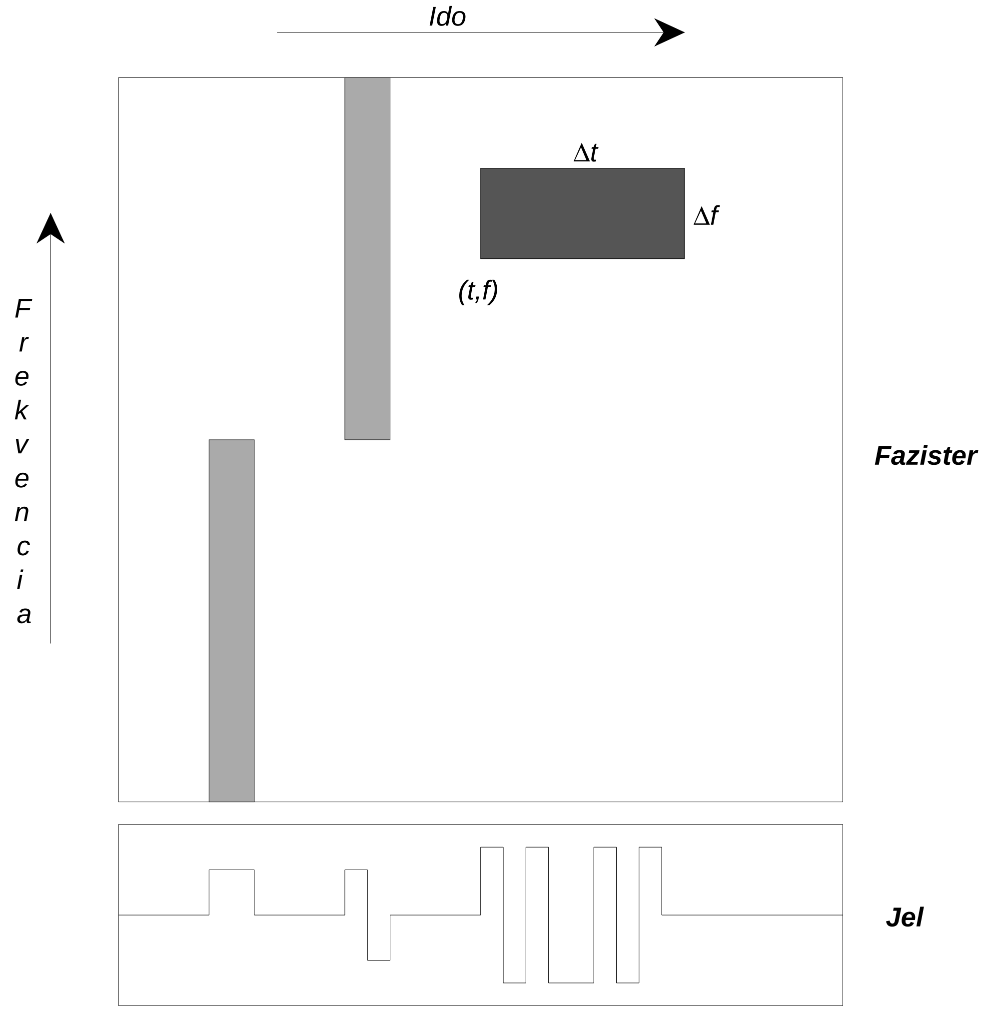
Más felbontás: Walsh, Haar, wavelet alapok!

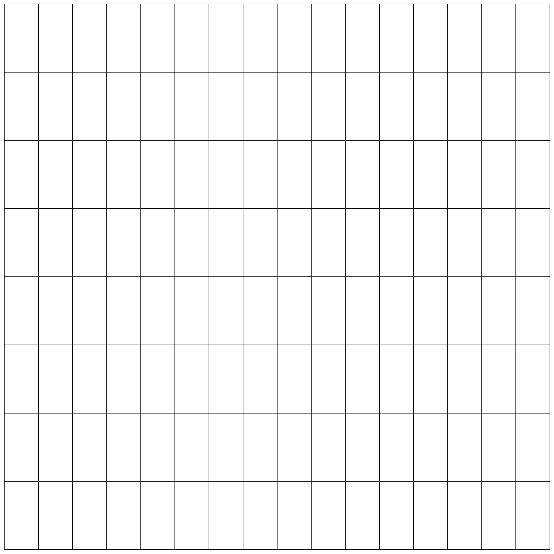


Eddig: amplitúdó vagy frekvencia leírás:
Pl. egy rövid, Dirac-delta jellegű impulzus
Fourier-transzformált: nagyon sok, kb. ugyanolyan amplitúdójú $\sin$ és $\cos$ hullám:
a fázisok pontosan olyanok, hogy az impulzus előtt és után a hullámok kioltják egymást, de a megfelelő időpontban az impulzus megjelenik!

Másik példa: konstans frekvenciájú jel
időben végtelen $\sin$ vagy $\cos$ hullám

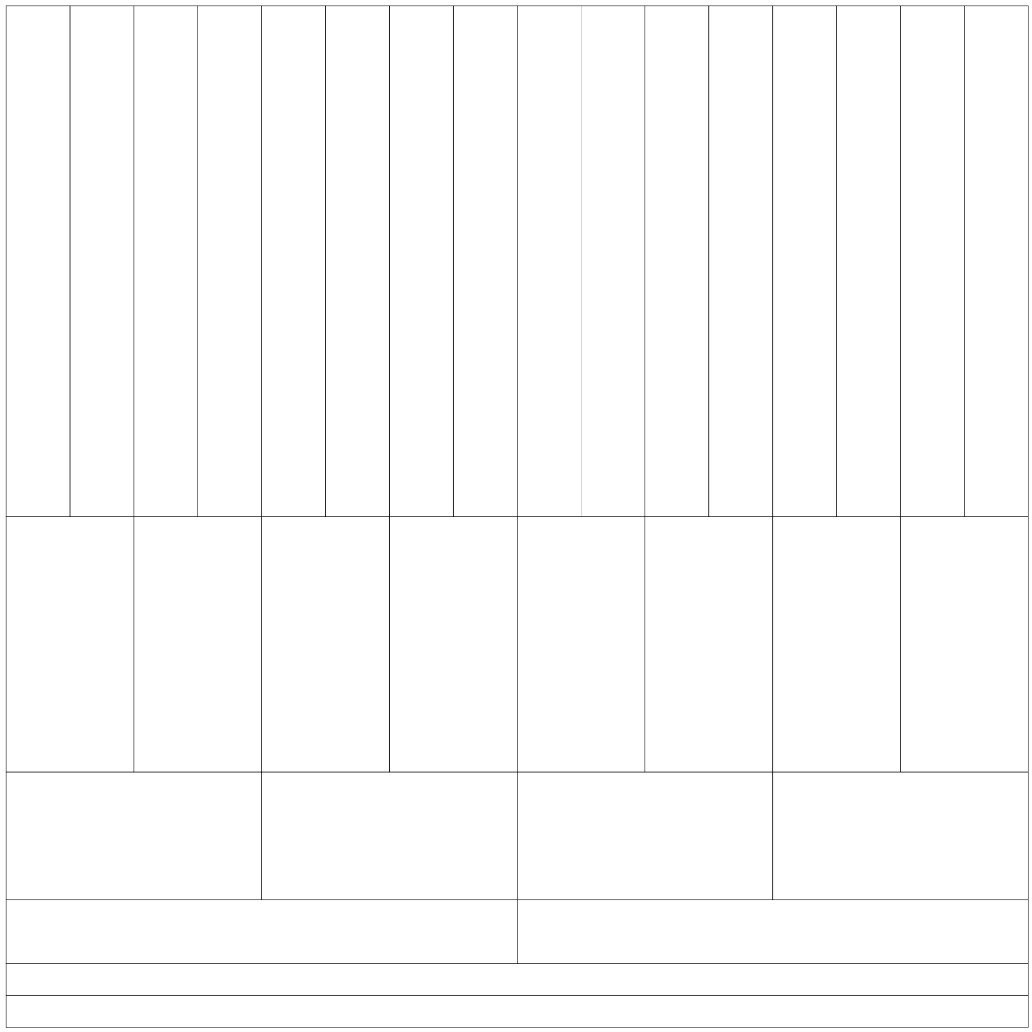
Csíkok a frekvencia-idő síkon
$\Delta f \times \Delta t$ méretű cellák.
Itt a a szokásos idő- és frekvenciatartománybeli ábrázolás $\longrightarrow$ speciális felbontás, ahol az adott cella egyik irányban végtelen kiterjedésű





Keskeny ablakok

Szeles ablakok



Wavelet bazis

Végtelen lehetséges felbontás a t és f csíkokon kívül!
Waveletek: frekvenciájuk viszonylag jól meghatározott ÉS időbeli (térbeli) helyzetük is korlátozott
Határozatlansági reláció!

Jelek kifejtése ortogonális bázisfüggvények szerint.
Dirac-delta $\longrightarrow$ amplitúdó–idő leírás.
sin és cos függvények $\longrightarrow$ Fourier leírás

Wavelet transzformáció:

- rekurzív szűrés
- páros-páratlan tagokra decimálás (FFT CT algoritmus!)

Diszkrét wavelet transzformáció (DWT) :
gyors FFT-vel összemérhető sebesség

FFT / a DWT forgatás az amplitúdó–idő tér és a frekvencia–idő tér között:
mátrixművelet!

Daubechies wavelet

DAUB4 wavelet

$$\mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & & & & & \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & & & & & & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & & & \\ & & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & & & & & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ c_2 & c_3 & & & & & & & & & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & & & & & & & & & c_3 & -c_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ (bemenő) adatokból $\longrightarrow$ $\mathbf{y} = \mathbf{D}_4\mathbf{x}$ kimenő transzformált.

Hasonló a DFT-hez:

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^{-2} & \dots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \dots & \omega^{-2(N-1)} \\ & & \vdots & & \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \dots & \omega^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{D_4}$ két FIR szűrő:
- páratlan sorok: $c_0, \ldots, c_3$ simítást/integrálás
- páros sorok: $c_3, -c_2, c_1, -c_0$ deriválás
(kvadratúra tükör szűrők)

Legyen a páros sorok kimenete 0 konstans és lineáris jelekre
$+$
Legyen a mátrix inverze annak transzponáltja:$\longrightarrow$

$$c_0 = (1+\sqrt{3})/4\sqrt{2} \qquad c_1 = (3+\sqrt{3})/4\sqrt{2}$$
$$c_2 = (3-\sqrt{3})/4\sqrt{2} \qquad c_3 = (1-\sqrt{3})/4\sqrt{2}$$

DAUB család többi tagja elfolytatható:

$$c_0 = (1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \qquad c_1 = (5+\sqrt{10}+3\sqrt{5+2$$
$$c_2 = (10-2\sqrt{10}+2\sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \qquad c_3 = (10-2\sqrt{10}-2\sqrt{5+$$
$$c_4 = (5+\sqrt{10}-3\sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \qquad c_5 = (1+\sqrt{10}-\sqrt{5+2$$

Diszkrét Wavelet Transzformáció

Diszkrét Wavelet Transzformáció (DWT):
wavelet mátrix hierarchikus alkalmazása:
1. lépés: teljes $N = 2^n$ adatsorra:
2. lépés: előző lépés simított adatain s.í.t.

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{mátrix}}
\begin{bmatrix} s_1 \\ d_1 \\ s_2 \\ d_2 \\ s_3 \\ d_3 \\ s_4 \\ d_4 \\ s_5 \\ d_5 \\ s_6 \\ d_6 \\ s_7 \\ d_7 \\ s_8 \\ d_8 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{sorbarakás}}
\left[\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{array}\right]
\xrightarrow{\text{mátrix}}
\left[\begin{array}{c} S_1 \\ D_1 \\ S_2 \\ D_2 \\ S_3 \\ D_3 \\ S_4 \\ D_4 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{array}\right]
\xrightarrow{\text{sorbarakás}}
\left[\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{array}\right]
$$

Végül: két $\mathcal{S}$ + a $\mathcal{D}$ + D, d wavelet együtthatók

DWT: ortogonális transzformációk sorozata $\rightarrow$ DWT inverze az eljárás megfordításából áll

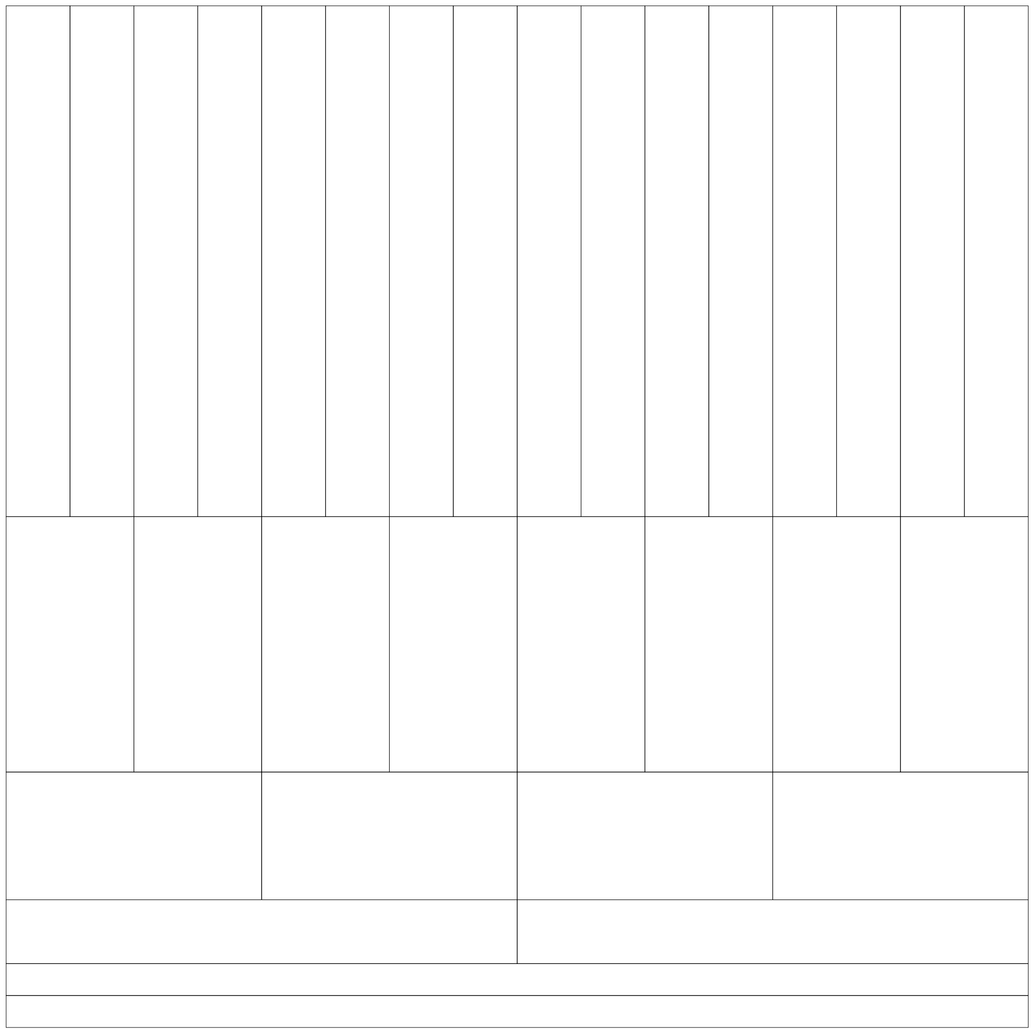
Ez hasonlít az FFT CT-re:

DWT mátrixszorzások $\longrightarrow$ lepkeművelet simított adatok kiválogatása $\longrightarrow$ FFT rendezés /bit-reverzálás

Más, mint az FFT CT:
FFT: minden lépésben 2^n pont
DWT: adatok száma lépésenként feleződik

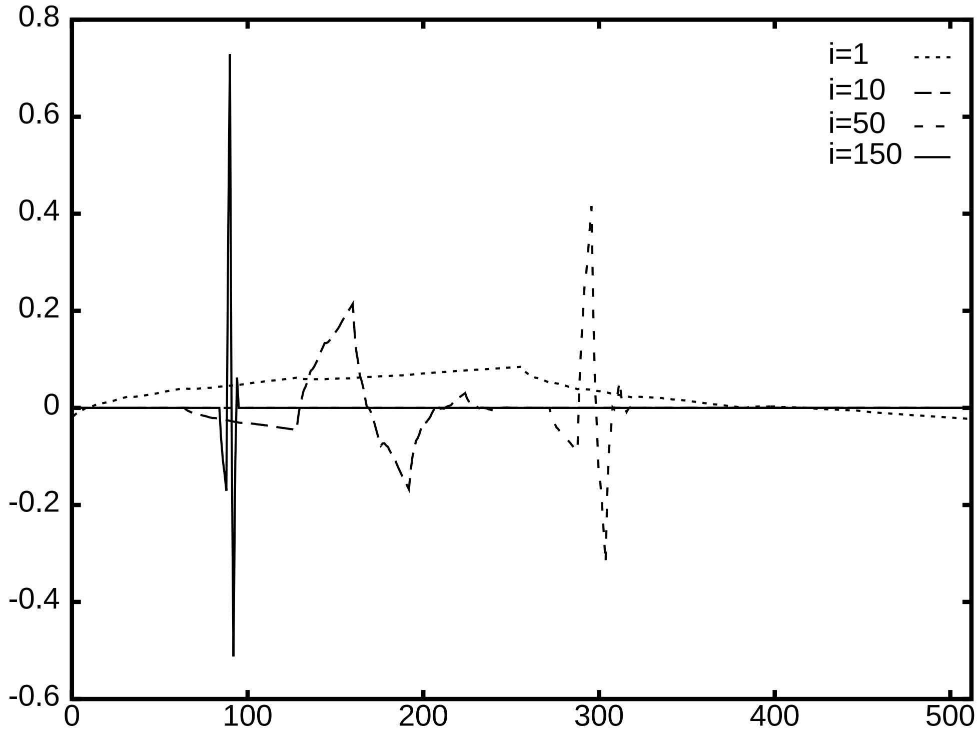
DWT fázistér: hierarchikusan felépítés
minden lépésben duplázva a frekvencia és felezve a pontok száma (lehet más is).

Alacsony frekvenciák értéke pontos DE mikor?
Magas frekvenciák értéke (mekkora?) DE tudjuk, hogy mikor!



Wavelet bazis

Alak: inverz DWT

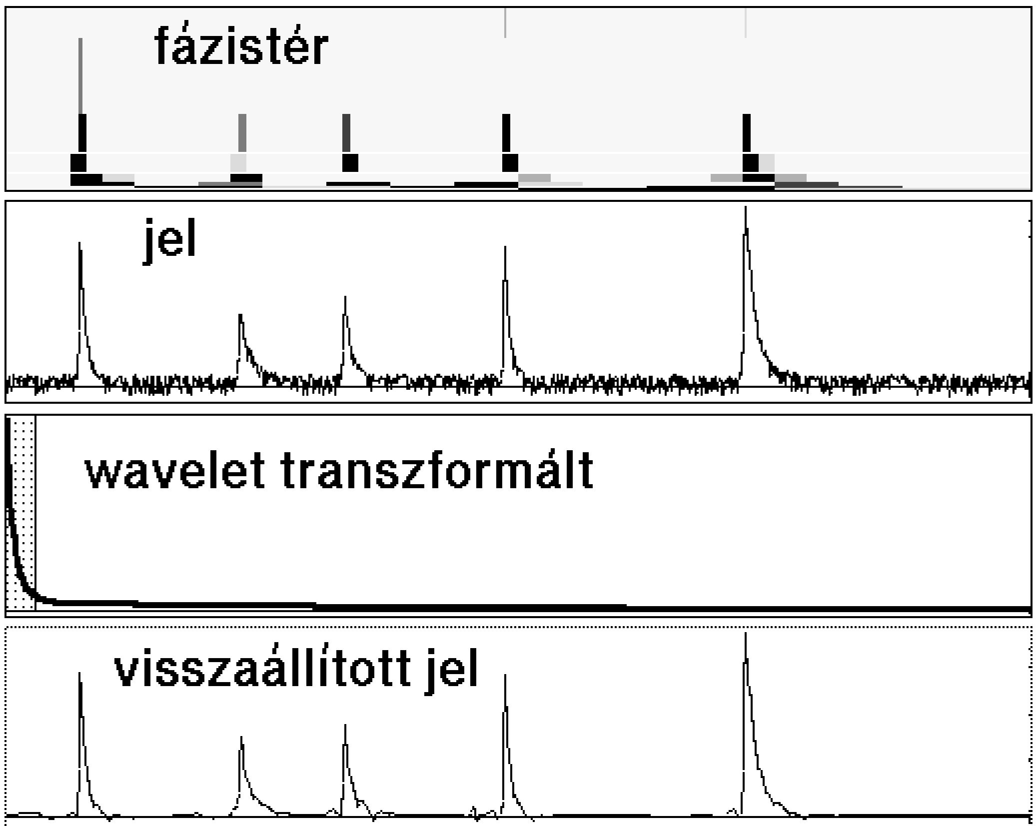


$i = 150$: $(128, 255)$ intervallum,
$x = (150 - 128)/(256 - 128) * 512 = 88$
$i = 50$: $(32, 63)$ intervallum, $x = (50 - 32)/(64 - 32) * 512 = 288$

N dimenziós DWT.

Wavelet közelítések

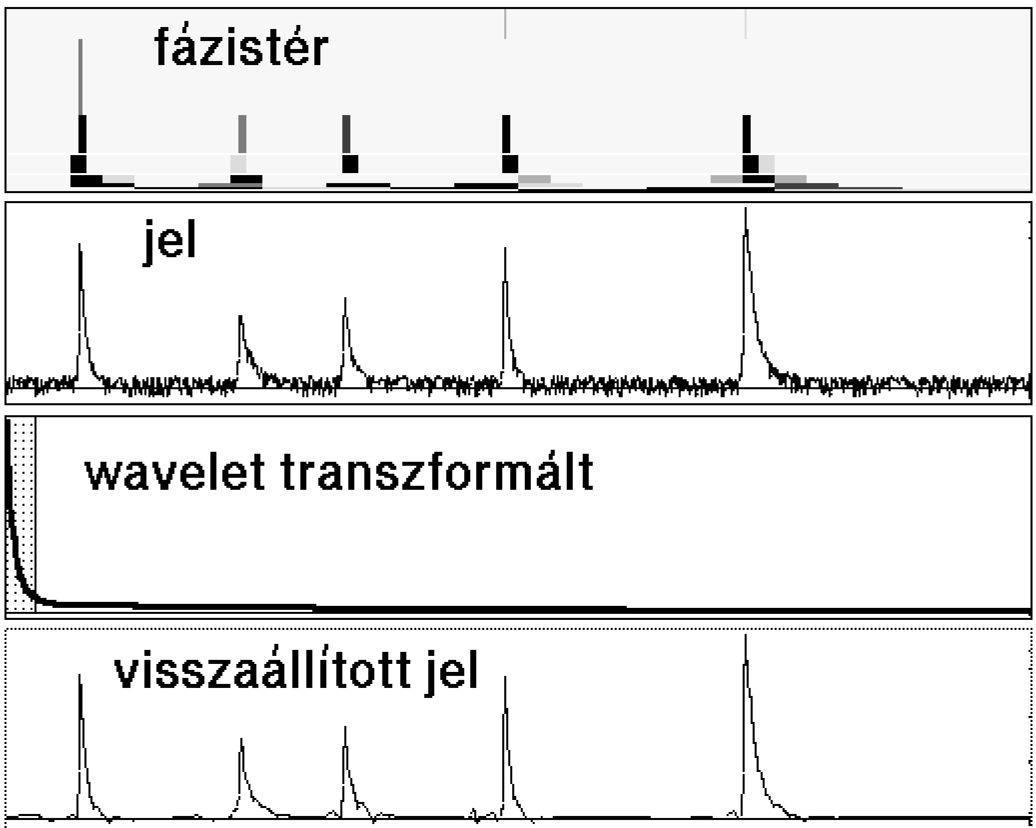
exponenciális lefutású impulzusok:



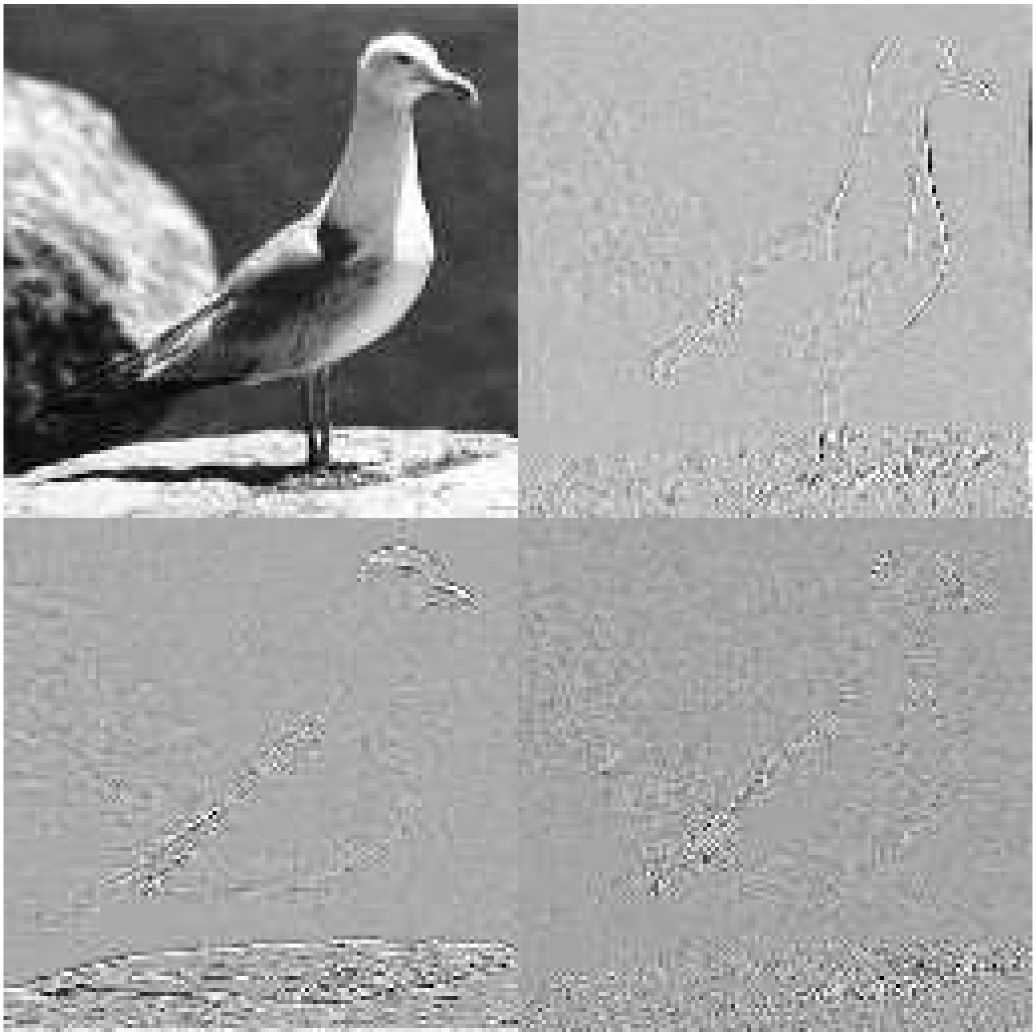
fázistérben csak a $512/32$ legnagyobb

Veszteséges tömörítés: amplitúdó és a hely is tárolandó!
A wavelet az összes ortonormált bázis közül a (Shannon entrópia szerint) *legrövidebb* leírása az adatoknak $\acute{e}s$ a bázisfüggvényeknek!

Rossz zajtömörítés: javul a jel/zaj viszony!



Képek: élek megőrzése fontos:
wavelet tömörítés, válogatott komponensek, $\longrightarrow$ kevesebb paraméter .



A visszaállított és az eredeti különbsége :