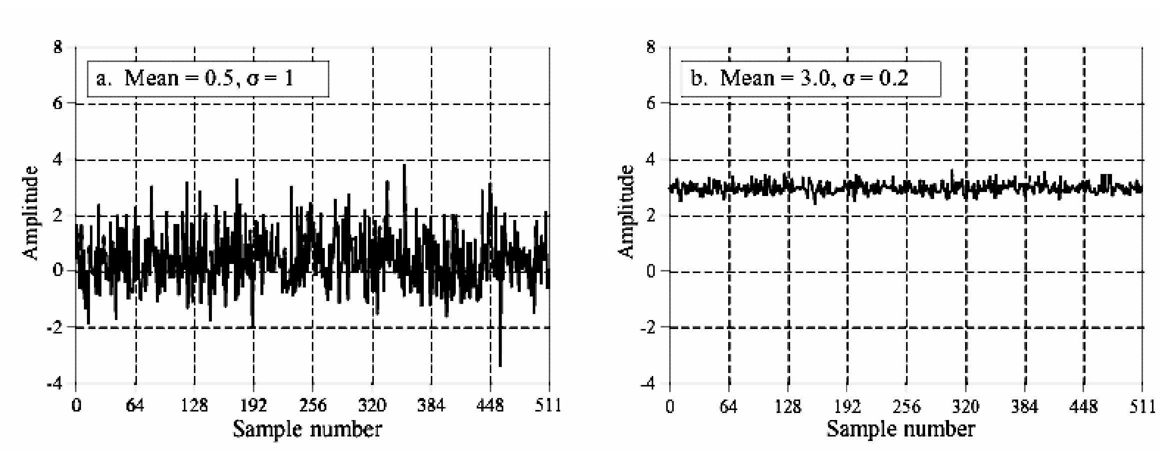
Zajok jellemzői

Zaj és zavar:

- zaj: nem lehet megszüntetni
- zavar: elvben kiszűrhető

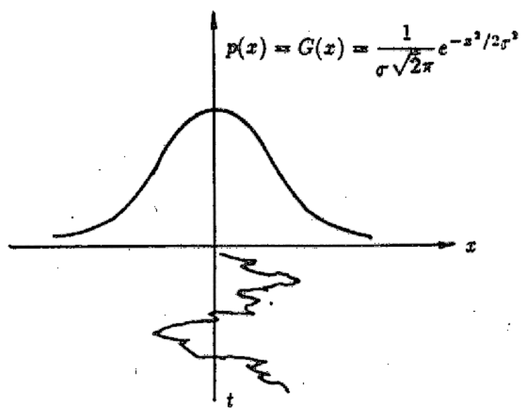
Zajok jellemzése valószínűségi adatokkal:
Folytonos vagy mintavett jelek:
Átlag és szórás:

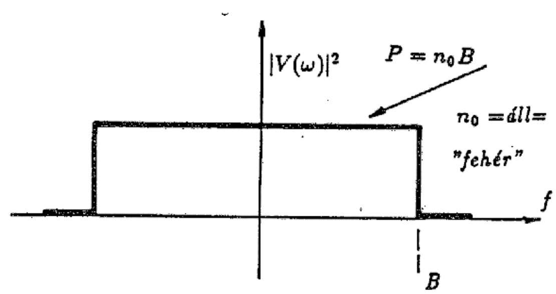


Zaj: effektív érték értelmes:
λ egyenáramú jel + σ szórású Gauss eloszlású zaj
a jel teljesítménye:

$$\text{teljesítmény} = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + x)^2 G(x) dx = \lambda^2 + \sigma^2 = P_{=} + P_{\sim} \quad .$$

A jel teljesítménye az egyen- és váltakozóteljesítmények összege!
Ha $\lambda = 0$, a teljesítmény a szórásnégyzettel egyezik meg





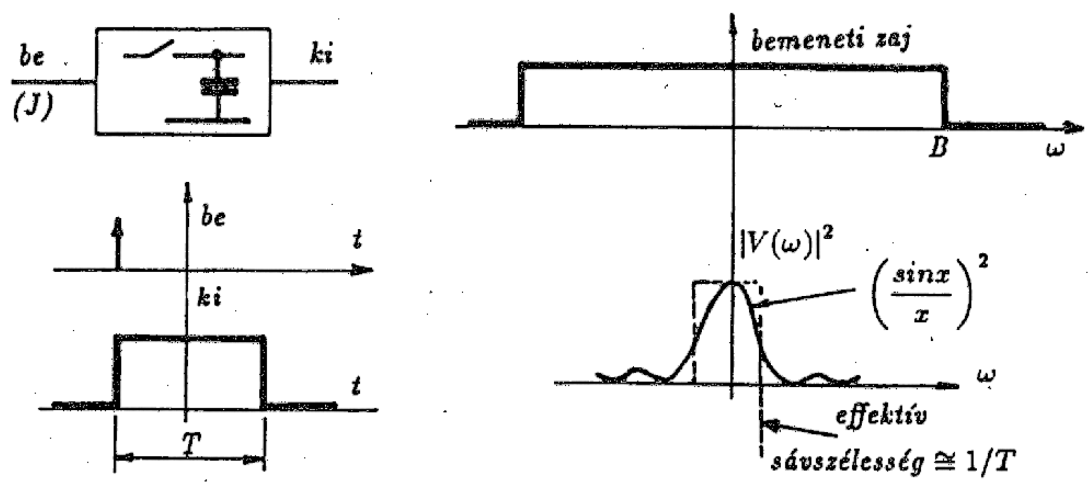
Fehérzaj: teljesítménysűrűség adott
B sávszélességű fehér zaj teljesítménye:

$$P_{\text{zaj}} = n_0 B \quad .$$

Integráló voltmérő

Ha sokáig mérünk: kiátlagoljuk a jelet
Milyen lesz ez a súlyfüggvény?

T idejű integrálás + delta függvény T ideig integrálva:
A súlyfüggvény: T széles impulzus



Ha a bemenő zaj B sávszélességű és P teljesítményű volt, akkor a kimeneti zaj:

$$P_{\mathrm{zaj}} = \sigma_{\mathrm{ki}}^2 = n_0 B_{eff} \simeq \frac{\sigma_{\mathrm{be}}^2}{BT} \quad .$$

Integráló voltmérők integrálási ideje általában a hálózati feszültség periódusidejének egészszámú többszöröse!

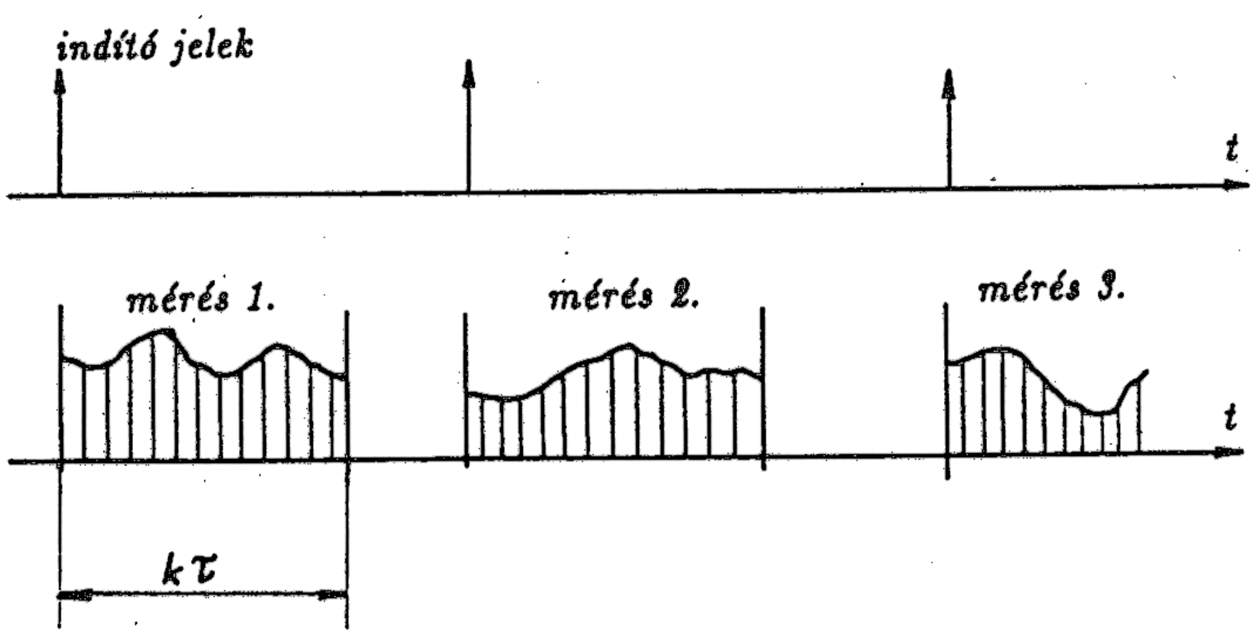
Kváziperiodikus jelek mérése zaj jelenlétében

Ötlet:

Nemperiodikus jelek $\longrightarrow$ tegyük kváziperiodikussá!
Ezután integrálás/összegezés $\longrightarrow$ kisebb zaj.

Fázis fontos - vagy pontos fázismérés, vagy saját trigger:

τ időközönként k-szor minta, N-szer megismételve:



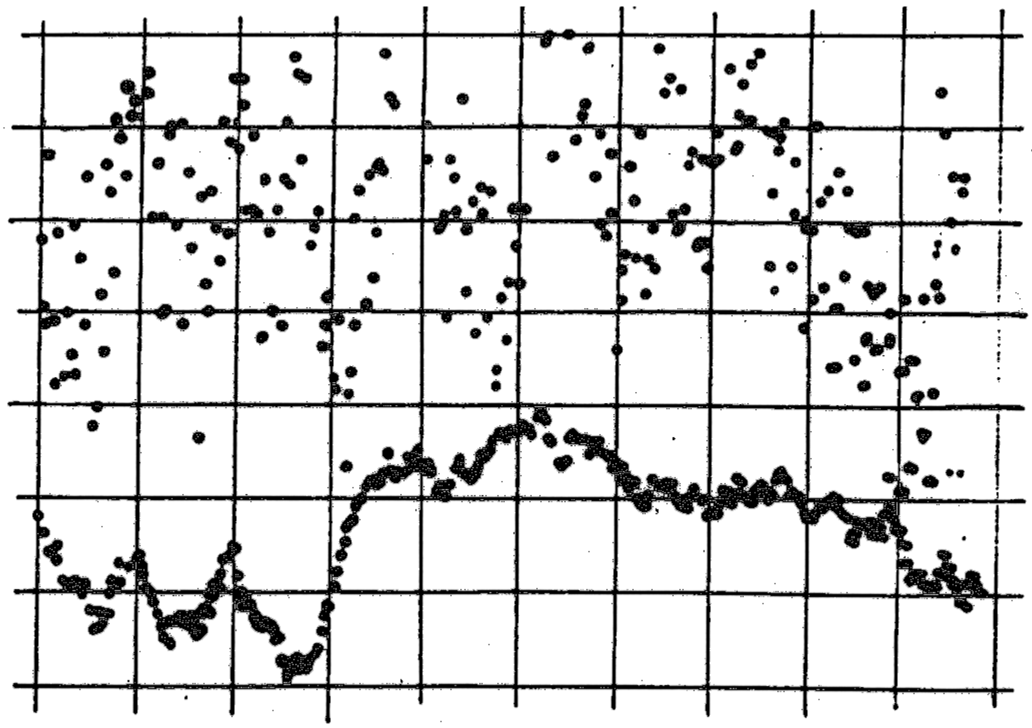
Milyen lesz a jel/zaj viszony?
Hasznos jel amplitudóját N-szeresére növeli
N-szeresére növekszik a zaj teljesítménye (szórásnégyzete)
jel/zaj javulás mértéke arányos $\sqrt{N}$-vel!

$$\left[\frac{\text{jel}}{\text{zaj}}\right]_{\text{1mérés}} = \frac{v(i)}{\sqrt{\sigma^2}}$$

$$\left[\frac{\text{jel}}{\text{zaj}}\right]_{\text{Nmérés}} = \frac{N v(i)}{\sqrt{N\sigma^2}}$$

$$\left[\frac{\text{jel}}{\text{zaj}}\right]_{\text{javulás}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Macska + trigger: 64 átlagolás után sokkal jobb a jel!



Összegezés/átlagolás: milyen lesz a frekvenciatartományban?

N db egymást T időközzel követő delta frekvenciaspektruma:

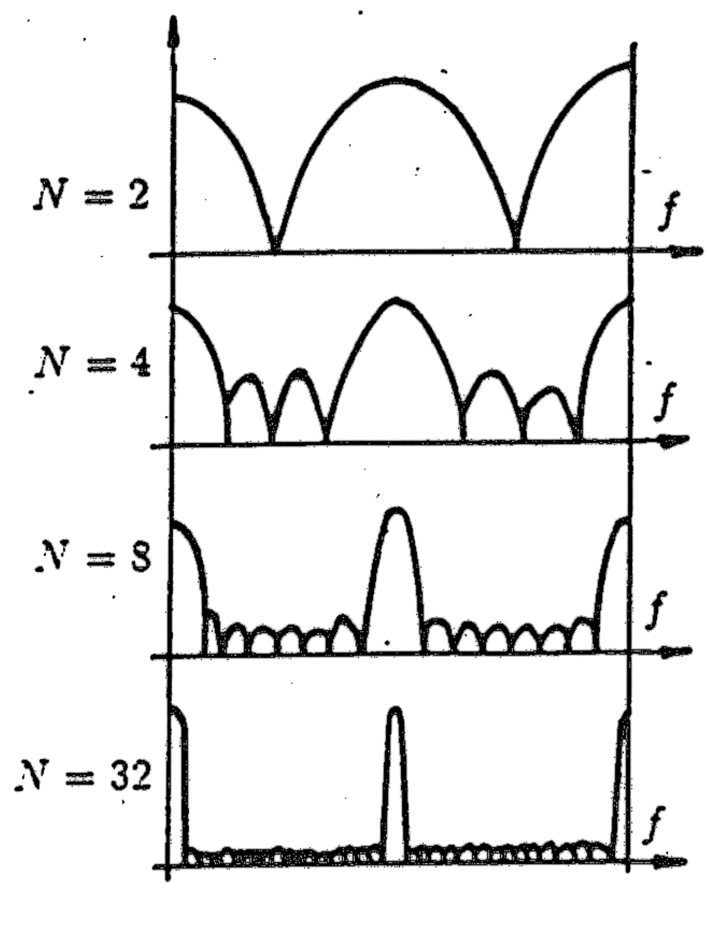
$$
\begin{aligned}
V(\omega) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\omega T} = \frac{e^{-i\omega TN}-1}{N(e^{-i\omega TN}-1)} \\
&= (\frac{1}{N})(\frac{1-e^{-i\omega TN}}{1-e^{-i\omega T}})(\frac{e^{i\omega TN/2}e^{-i\omega T/2}}{e^{i\omega TN/2}e^{-i\omega T/2}}) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \frac{1}{N}\frac{i2\sin(\omega NT/2)}{i2\sin(\omega T/2)} \\
\Longrightarrow \quad & |V(f)| = \frac{1}{N}\frac{\sin(\pi f NT)}{\sin(\pi f T)}.
\end{aligned}
$$

Minták számának növelése $\longrightarrow$ fésűszerű karakterisztika:

Minták számának növelése $\longrightarrow$ fésűszerű karakterisztika:
fésűs szűrő

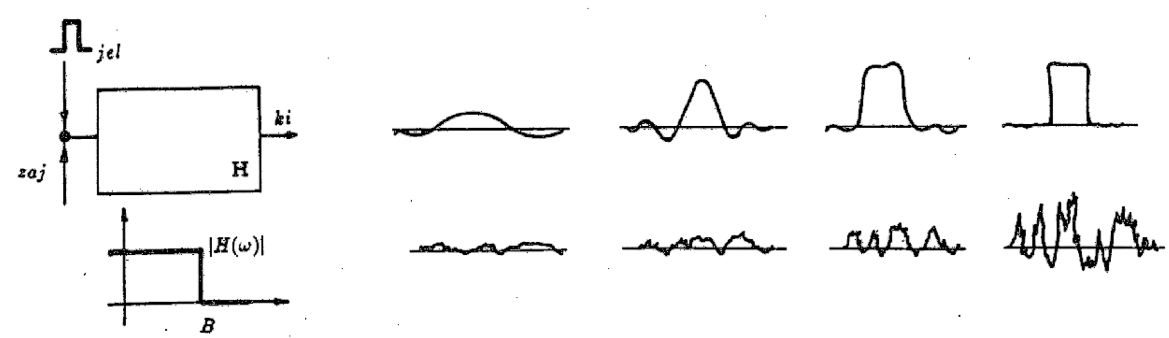
Pl.:
2OO Hz-es négyszögjel + 2OO.1 Hz-es szinusz: 16OOO összegezés után csak a négyszögjel marad!

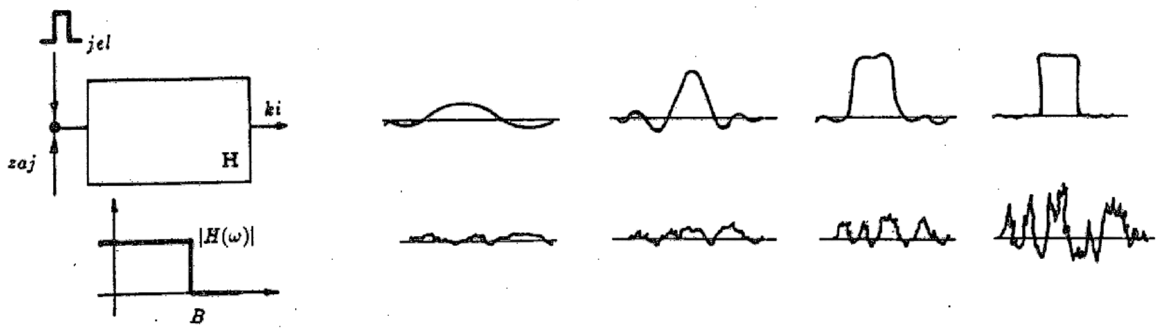


Ismert jelalak amplitudójának mérése

Előzetes információ: ismerjük a jelalakot.
Mekkora az amplitúdó?

t szélességű négyszögimpulzus + fehérzaj:
keressük az amplitudót egy H ideális aluláteresztő szűrővel:
H sávszélességének növelése: jel amplitudója egy darabig nő, majd állandó
H sávszélességének növelése: zaj amplitudója H-val arányosan nő
Optimum?!

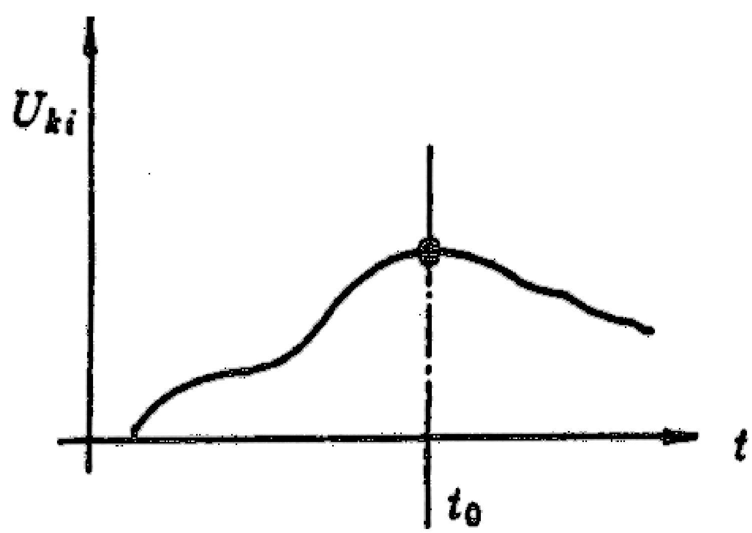




Bemenőjel alakja ismert:
milyen legyen az optimális H a maximálisan pontos amplitúdó méréshez?

S/N = Signal/Noise ratio = jel/zaj viszony maximuma $h(t)$ függvényében

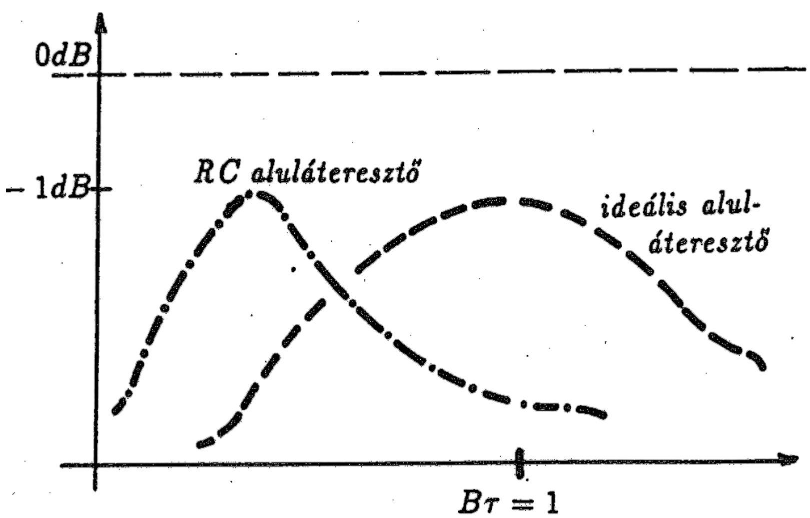
$$\frac{S}{N} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau\right]^2}{n_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau)d\tau}$$



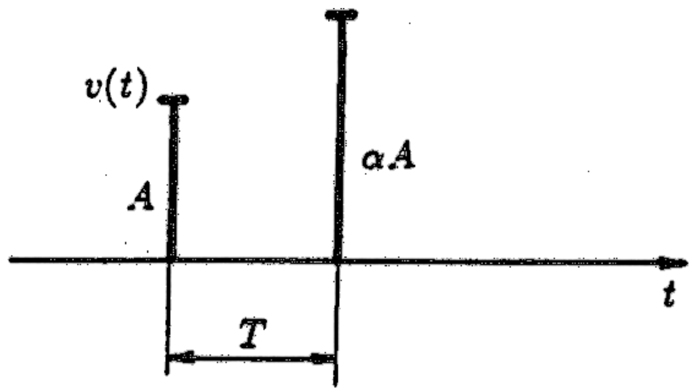
$$\frac{S}{N} = \frac{[\int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau]^2}{n_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau)d\tau}$$

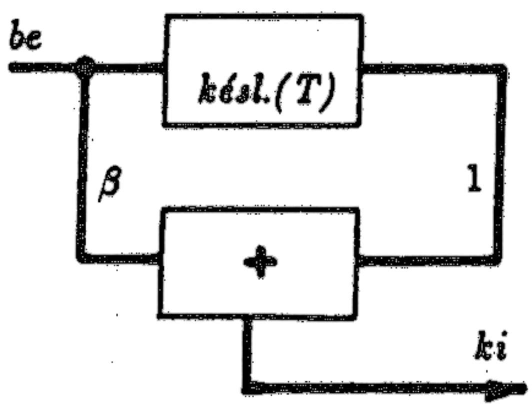
Ez maximális, ha $h(t) = v(t_0 - t)$!
Ez az u.n. illesztett szűrő
Megvalósítás digitális szűrővel!
Hálózat frekvenciakarakterisztikája: $h(t) = v(t_0 - t)$!

Mennyire optimális?
τ szélességű impulzus + B sávszélességű aluláteresztő
Jel/zaj az ideális esethez képest rosszabb
Az ideális aluláteresztő szűrő kevésbé érzékeny az impulzus szélességére

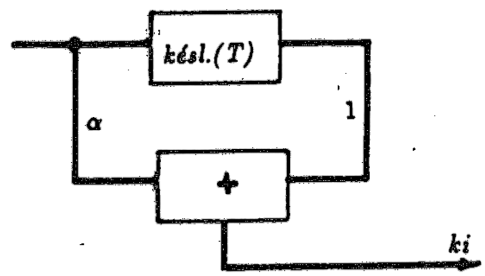


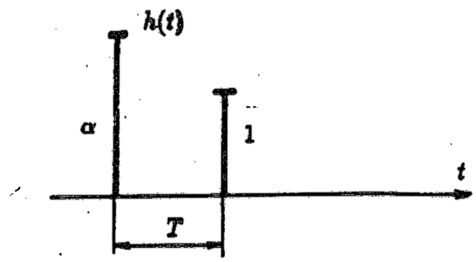
Illesztett szűrő:
Bemenőjel két Dirac-delta, relatív amplitúdóarány ismert
Milyen az optimális hálózatot ?
Két jel + zaj $\longrightarrow$ egyetlen mérésből A





Hálózat egyszerű digitális (FIR) szűrő + β paraméter:





$$\frac{S}{N} = \frac{(A + A\alpha\beta)^2}{n_0^2(1+\beta)^2}$$
$$= \frac{A^2}{n_0^2}\frac{(1+\alpha\beta)^2}{1+\beta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{S}{N}\right) \Rightarrow \beta = \alpha$$

$$(n + \beta n_T)^2 = n^2 + 2\beta n n_T + \beta^2 n_T^2$$

szélsőérték: $\beta = \alpha$

Wiener szűrés

Dekonvolúció:
$H(\omega)$ hálózat $\rightarrow K(\omega) = 1/H(\omega)$ korrekció

Probléma a zaj, és a $H(\omega) = 0$ szakasz!

$$V_{ki}(\omega) = V_{be}(\omega)H(\omega)$$

$z(t)$ a mérés során megjelenő zaj

Mérjük a $v_z(t) = v_{ki} + z(t)$ jelet !

Optimális $K(\omega)$ szűrő:
mért $V_z(\omega)$ szűrve + dekonvolválva $H(\omega)$-val
a legjobban közelíti V_{be}-t

$$V(\omega) = V_z(\omega)K(\omega)/H(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid V(\omega) - V_{be}(\omega) \mid^2 d\omega$$

minimális!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid (V_{ki}(\omega) + Z(\omega))K(\omega)/H(\omega) - V_{ki}(\omega)/H(\omega) \mid^2 d\omega$$

Zaj és jel korrelálatlan $\longrightarrow$ keresztszorzatuk eltűnik:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid H(\omega) \mid^{-2} (\mid V_{ki}(\omega) \mid^2 \mid 1 - K(\omega) \mid^2 + \mid Z(\omega) \mid^2 \mid K(\omega) \mid^2) d\omega$$

Minimális, ha $K(\omega)$ minden ω-ra minimális.
Deriválva $K(\omega)$:

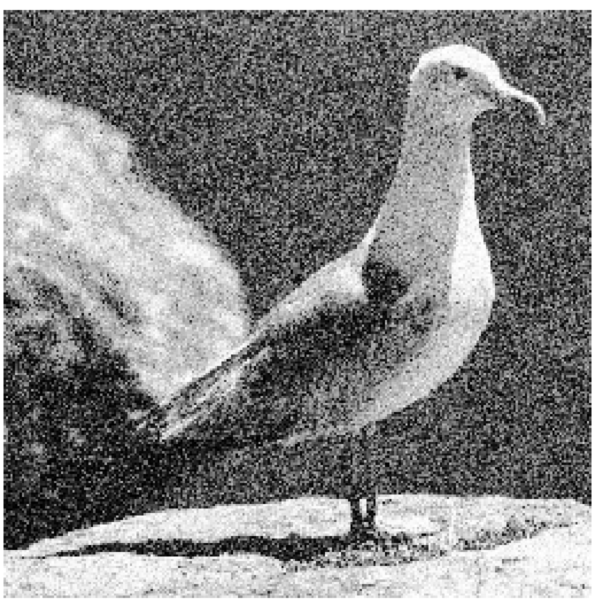
$$K(\omega) = \mid V_{ki}(\omega) \mid^2 / (\mid V_{ki}(\omega) \mid^2 + \mid Z(\omega) \mid^2)$$

Optimális Wiener szűrő

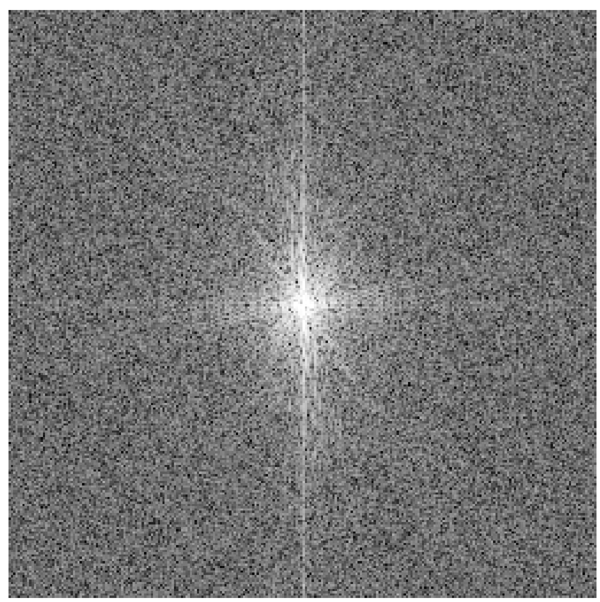
Ahol $V_{ki}(\omega)$ sokkal nagyobb, mint $Z(\omega) \rightarrow \approx 1$
ahol a zaj teljesítménye sokkal nagyobb $\rightarrow$ kb. a jel/zaj viszony négyzetével esik V_{ki}

A Wiener szűrő nem tartalmazza a rendszer súlyfüggvényét, csak a zaj és a jel teljesítményspektrumát!

Optimális szűrő $\rightarrow$ kell a zaj teljesítményspektruma
Pl.: $Z(\omega) = konstans$
Nagyobb pontosság: elég $Z(\omega)$ durva megadása $\rightarrow$ a Wiener-szűrő másodrendben tartalmazza V_{ki}-t és Z-t!

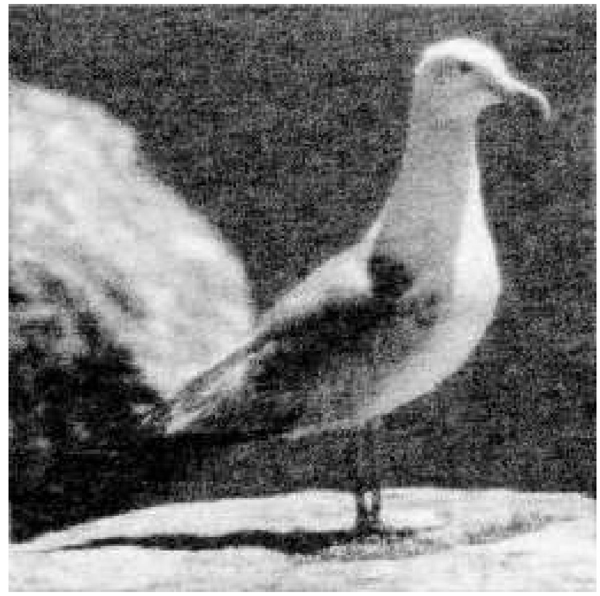


Zajos eredeti kép



Fourier-transzformált

Wiener-szűrő



szűrt kép