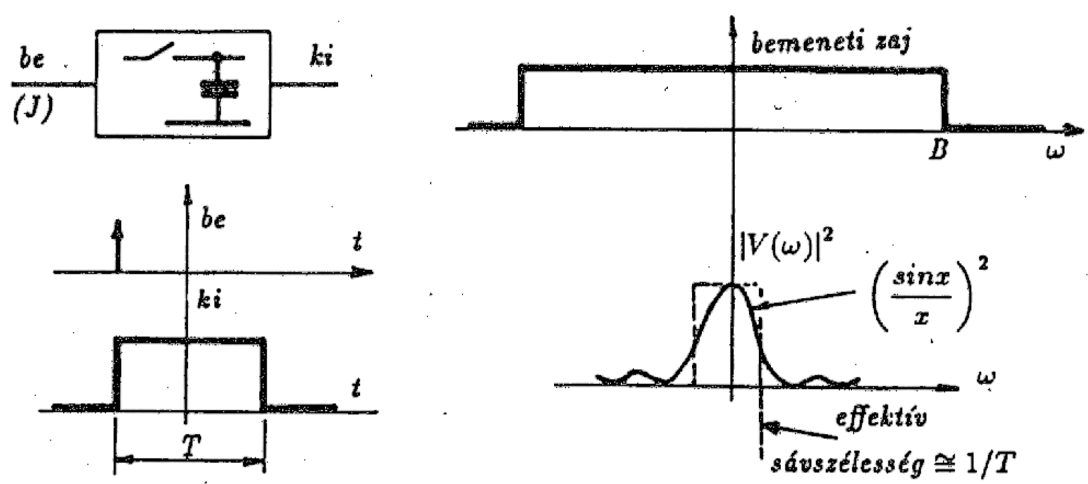
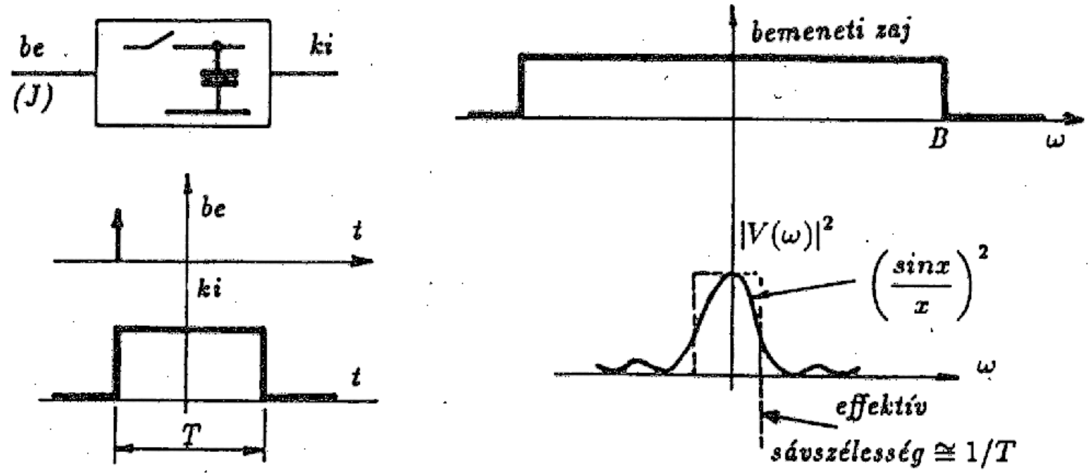
Integráló voltmérő

Ha sokáig mérünk: kiátlagoljuk a jelet
Milyen lesz ez a súlyfüggvény?



T idejű integrálás + delta függvény T ideig integrálva:
A súlyfüggvény: T széles impulzus



Ha a bemenő zaj B sávszélességű és P teljesítményű volt, akkor a kimeneti zaj:

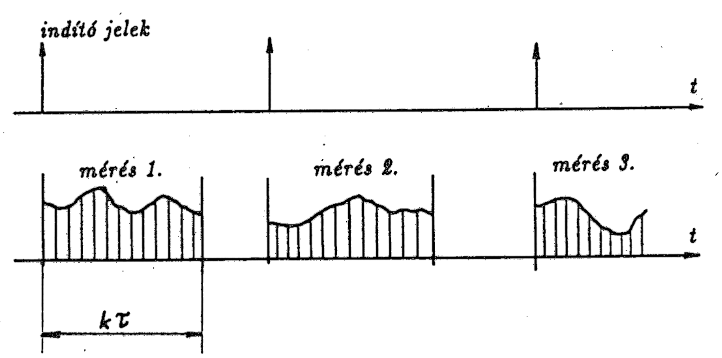
$$P_{\text{zaj}} = \sigma^2_{\text{ki}} = n_0 B_{eff} \simeq \frac{\sigma^2_{\text{be}}}{BT} \quad .$$

Integráló voltmérők integrálási ideje általában a hálózati feszültség periódusidejének egészszámú többszöröse!

Kváziperiodikus jelek detektálása zaj jelenlétében

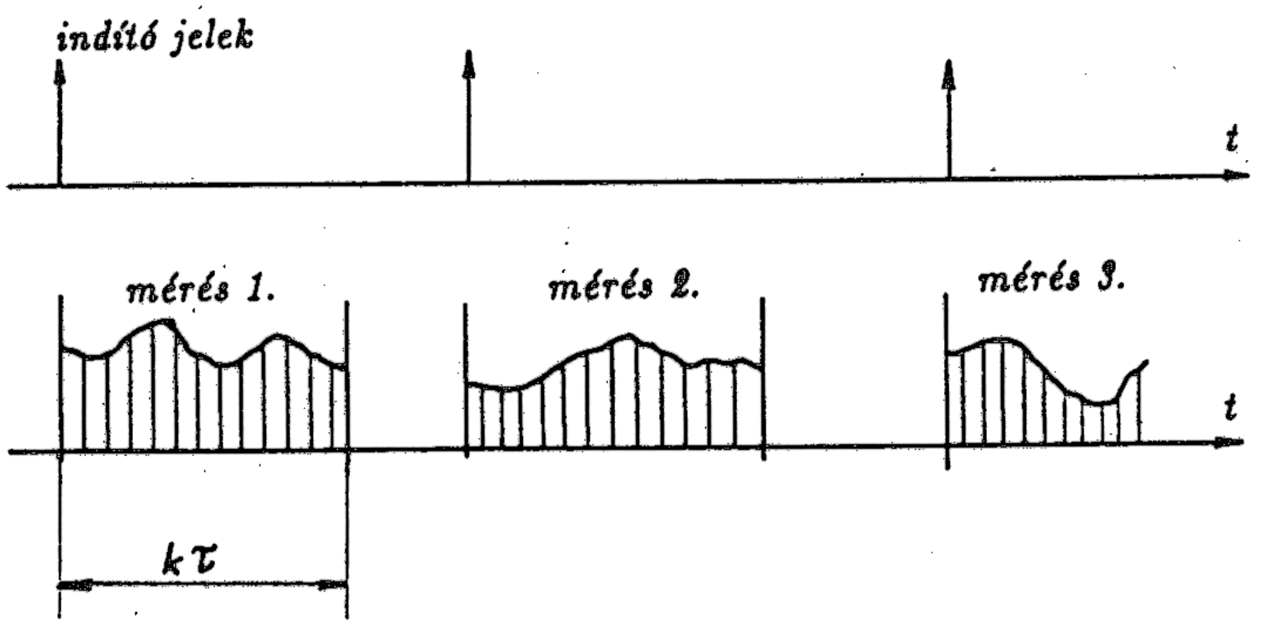
Ötlet:

Nemperiodikus jelek $\longrightarrow$ tegyük kváziperiodikussá!
Ezután integrálás/összegezés $\longrightarrow$ kisebb zaj.



A fázis fontos - azaz vagy pontos fázismérés, vagy saját trigger szükséges:

τ időközönként k-szor minta, N-szer megismételve:



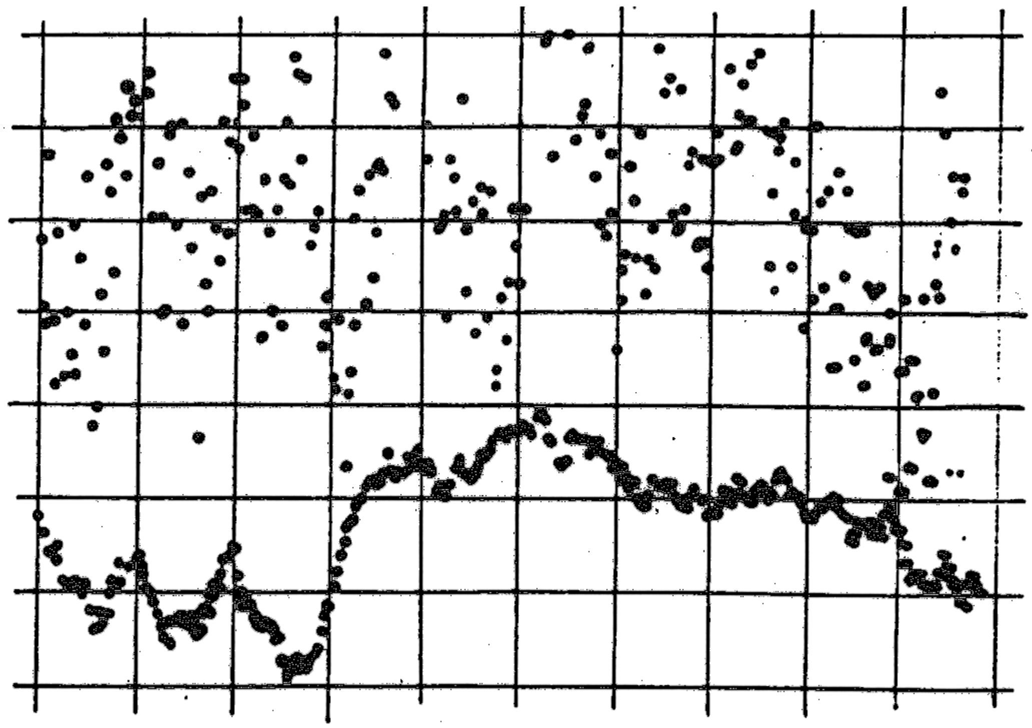
Milyen lesz a jel/zaj viszony?
Az átlagolás a hasznos jel amplitudóját N-szeresére növeli
N-szeresére növekszik a zaj teljesítménye (szórásnégyzete)
A jel/zaj javulás mértéke arányos $\sqrt{N}$-vel!

$$\left[\frac{\text{jel}}{\text{zaj}}\right]_{\text{1mérés}} = \frac{v(i)}{\sqrt{\sigma^2}}$$

$$\left[\frac{\text{jel}}{\text{zaj}}\right]_{\text{Nmérés}} = \frac{Nv(i)}{\sqrt{N\sigma^2}}$$

$$\left[\frac{\text{jel}}{\text{zaj}}\right]_{\text{javulás}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Macska + trigger: 64 átlagolás után sokkal jobb a jel!



Összegezés/átlagolás: milyen lesz a frekvenciatartományban?

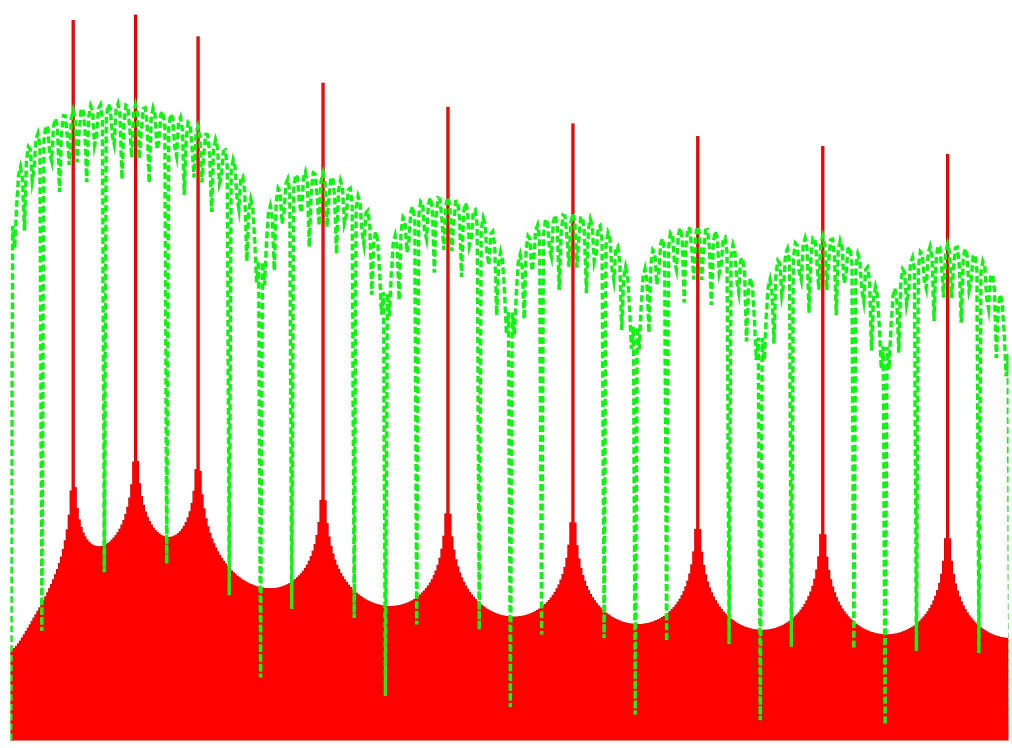
N db egymást T időközzel követő delta frekvenciaspektruma:

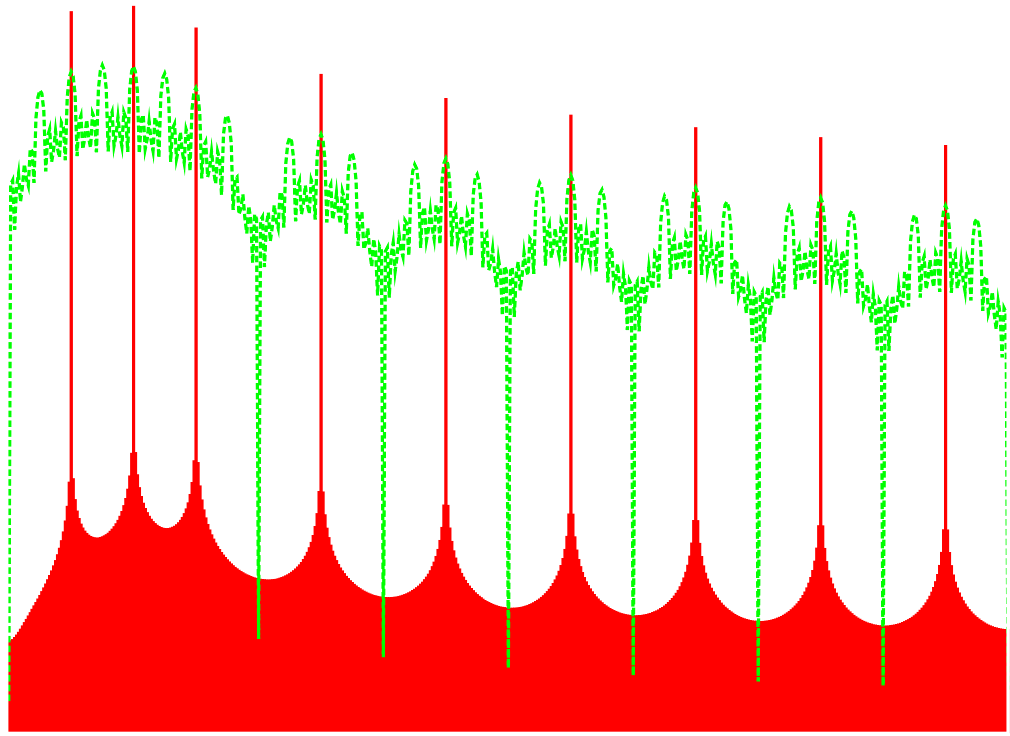
$$V(\omega) \quad = \quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\omega T} = \frac{e^{-i\omega T} - 1}{N(e^{-i\omega T} - 1)}$$

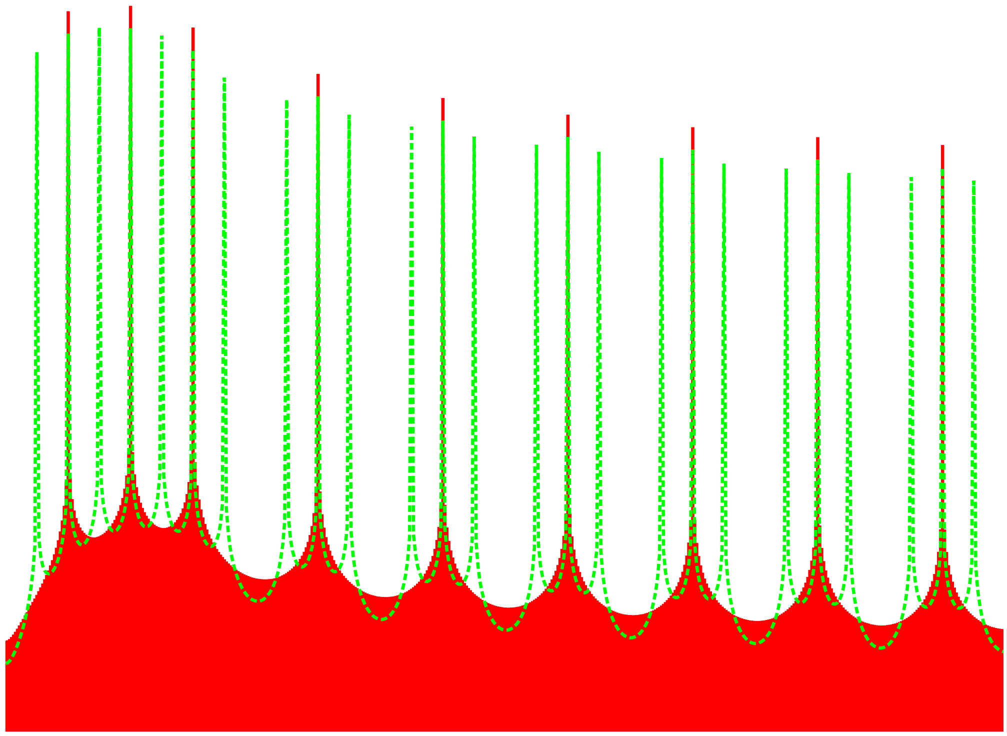
$$= \quad (\frac{1}{N})(\frac{1 - e^{-i\omega TN}}{1 - e^{-i\omega T}})(\frac{e^{i\omega TN/2}e^{-i\omega T/2}}{e^{i\omega TN/2}e^{-i\omega T/2}}) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \frac{1}{N}\frac{e^{i\omega TN/2}-e^{-i\omega TN/2}}{e^{i\omega TN/2}}\frac{e^{-i\omega T/2}}{e^{i\omega T/2}-e^{-i\omega T/2}} \\
\Longrightarrow & \\
|V(f)| &= \quad \frac{1}{N}\frac{\sin(\omega NT/2)}{\sin(\omega T/2)} = \frac{1}{N}\frac{\sin(\pi fNT)}{\sin(\pi fT)}.
\end{aligned}
$$

Minták számának növelése $\longrightarrow$ fésűszerű karakterisztika - fésűs szűrő



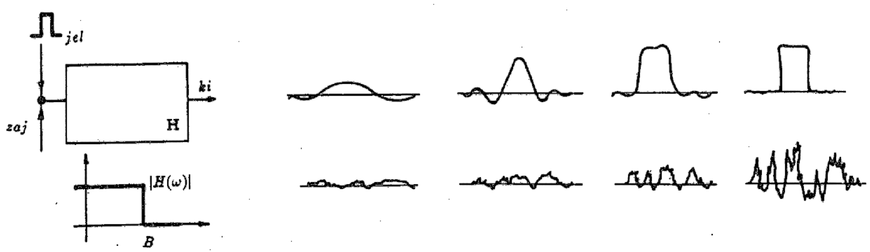




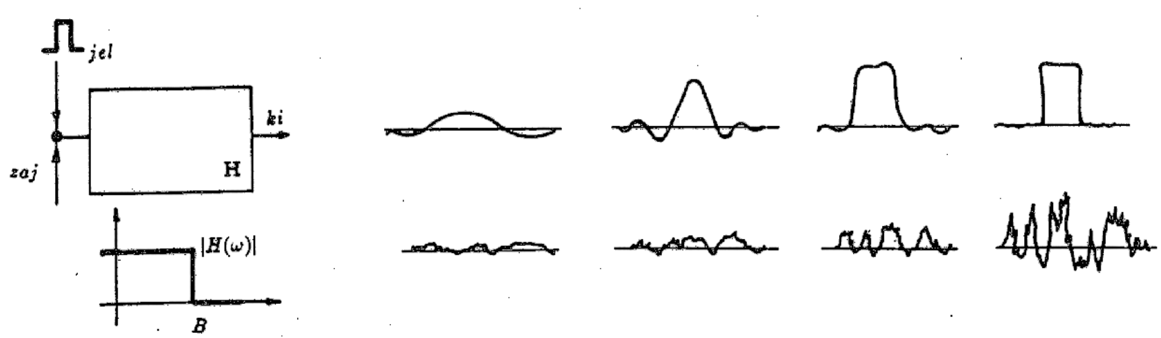
I. Cf

Illesztett szűrő: ismert jelalak amplitudójának mérése

Előzetes információ: ismerjük a jelalakot!
Mekkora az amplitúdó?
Példa: t szélességű négyszögimpulzus + fehérzaj:



keressük az amplitudót egy H ideális aluláteresztő szűrővel:
H sávszélességének növelése: jel amplitudója egy darabig nő, majd állandó
H sávszélességének növelése: zaj amplitudója H-val arányosan nő
Hol az optimum?!



Másképpen: ha a bemenőjel alakja ismert:
milyen legyen az optimális $H(\omega)$ (vagy $h(t)$) a maximálisan pontos amplitúdó méréshez?

Megoldás a S/N (SNR, Signal/Noise Ratio, jel/zaj viszony) maximumát keressük $h(t)$ függvényében, digitalizált értékekre.

Legyen $\bar{h} = [h_i]$ a szűrő, az $\bar{x} = \bar{s} + \bar{n}$ szűrendő jel pedig a s jel + a n zaj összege.

A szűrő kimente:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_i (h[n-i])^x [i] \\
\bar{y} &= \bar{h} * \bar{x} = \bar{h} * \bar{s} + \bar{h} * \bar{n} = y_s + y_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S/N &= \frac{|\bar{y}_s|^2}{E(|\bar{y}_n|^2)} = \frac{|\bar{h} * \bar{s}|^2}{E(|\bar{h} * \bar{n}|^2)} \\
&= \frac{\int d\omega |H(\omega)S(\omega)|^2}{E(\int d\omega |H(\omega)N(\omega)|^2)}
\end{aligned}
$$

De

$$
\begin{aligned}
E(|\bar{h} * \bar{n}|^2) &= E(\int d\omega |H(\omega)N(\omega)|^2) \\
&= E(\int d\omega (H(\omega)N(\omega))(H(\omega)N(\omega))^*) \\
&= E(\int d\omega (H(\omega)H(\omega)^*)(N(\omega)N(\omega)^*)) \\
&= \bar{h}^* E(\bar{n}\bar{n}^*)\bar{h} = \bar{h}^* R_n \bar{h} \\
&= \bar{h}^* \bar{h}
\end{aligned}
$$

, mivel fehérzaj esetén a zaj autokovariancia mátrixa $R = I$.

$$
S/N = \frac{|\bar{h} * \bar{s}|^2}{\bar{h}^* \bar{h}}
$$

Felső limit (Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij):

$$
|\bar{a} * \bar{b}|^2 \leq (\bar{a}^* \bar{a})(\bar{b}^* \bar{b})
$$

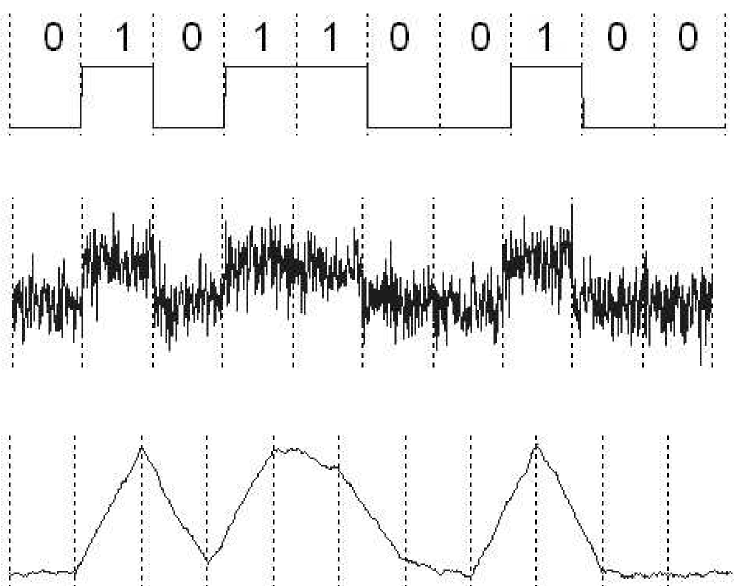
Így

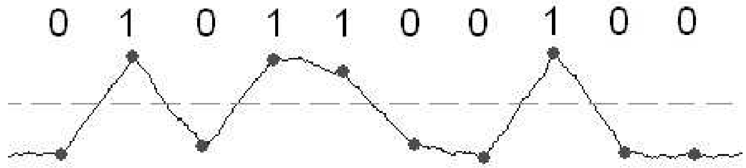
$$S/N = \frac{|\bar{h} * \bar{s}|^2}{\bar{h}^* \bar{h}} \leq \frac{(\bar{h}^* \bar{h})(\bar{s}^* \bar{s})}{\bar{h}^* \bar{h}} = \bar{s}^* \bar{s}$$

A maximumot akkor érjük el, ha $\bar{h} = \alpha \bar{s}$, azaz ha $h(t) = v(t_0 - t)$ (a konjugálás az első definícióban időbeli tükrözést jelent!).

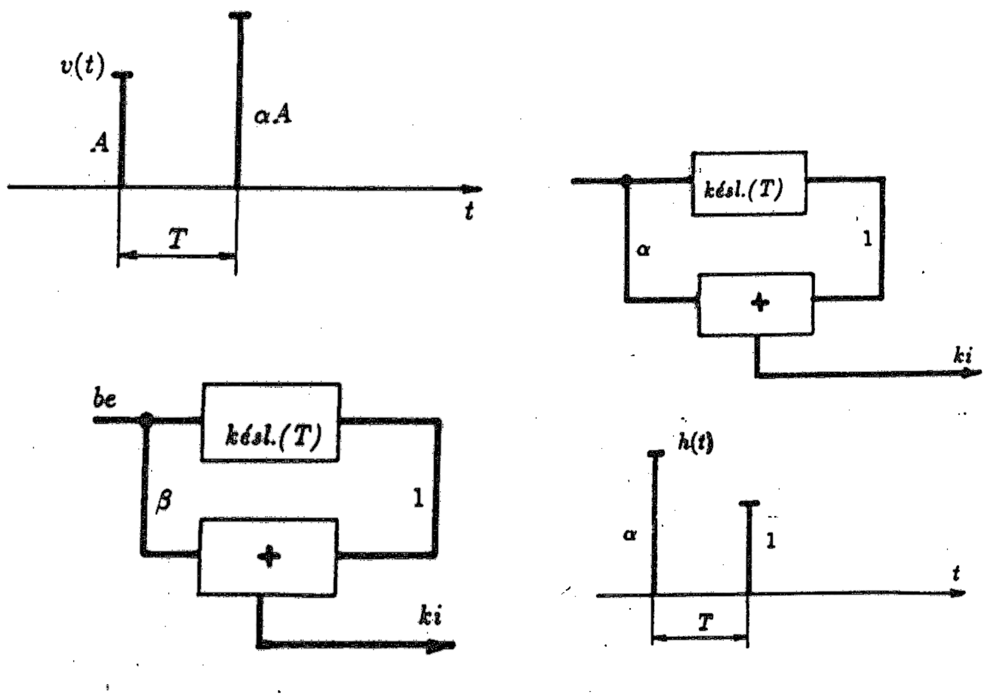
Illesztett szűrő: megvalósítás pl. digitális szűrővel!
Hálózat frekvenciakarakterisztikája: $h(t) = v(t_0 - t)$!

Digitális átvitelnél az illesztett szűrő maximalizálja a bit/hiba arányt is:

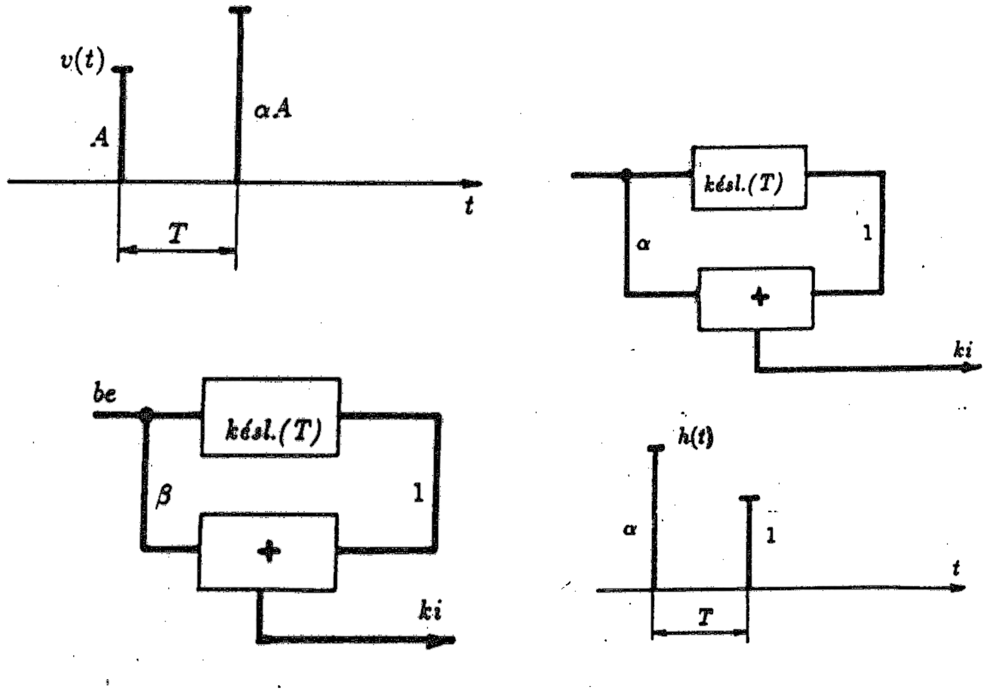




Bemenőjel két Dirac-delta, relatív α amplitúdóarány ismert: milyen az optimális hálózat ?
Két jel + zaj $\longrightarrow$ egyetlen mérésből meghatározandó A



Hálózat egyszerű digitális (FIR) szűrő + β paraméter:



$$\frac{S}{N} = \frac{(A + A\alpha\beta)^2}{n_0^2(1+\beta)^2}$$

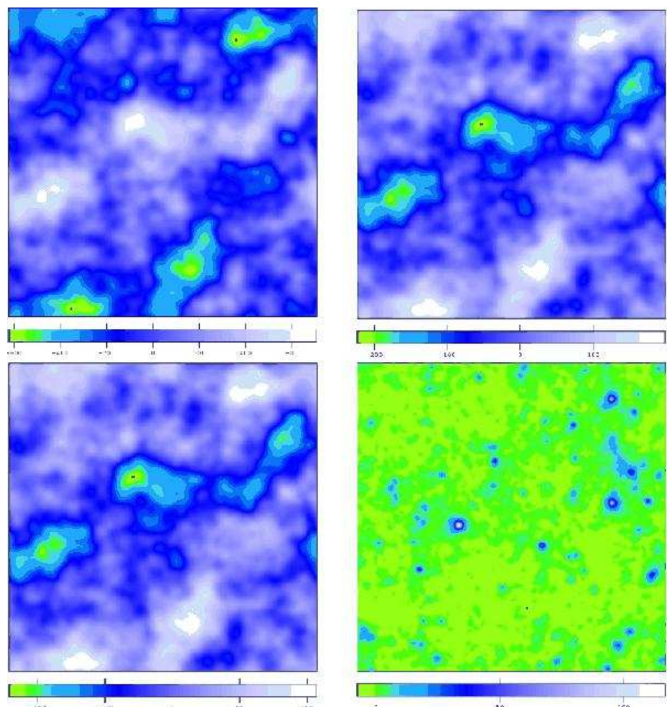
$$= \frac{A^2}{n_0^2}\frac{(1+\alpha\beta)^2}{1+\beta^2}$$

itt $\quad (n + \beta n_T)^2 = n^2 + 2\beta n n_T + \beta^2 n_T^2$

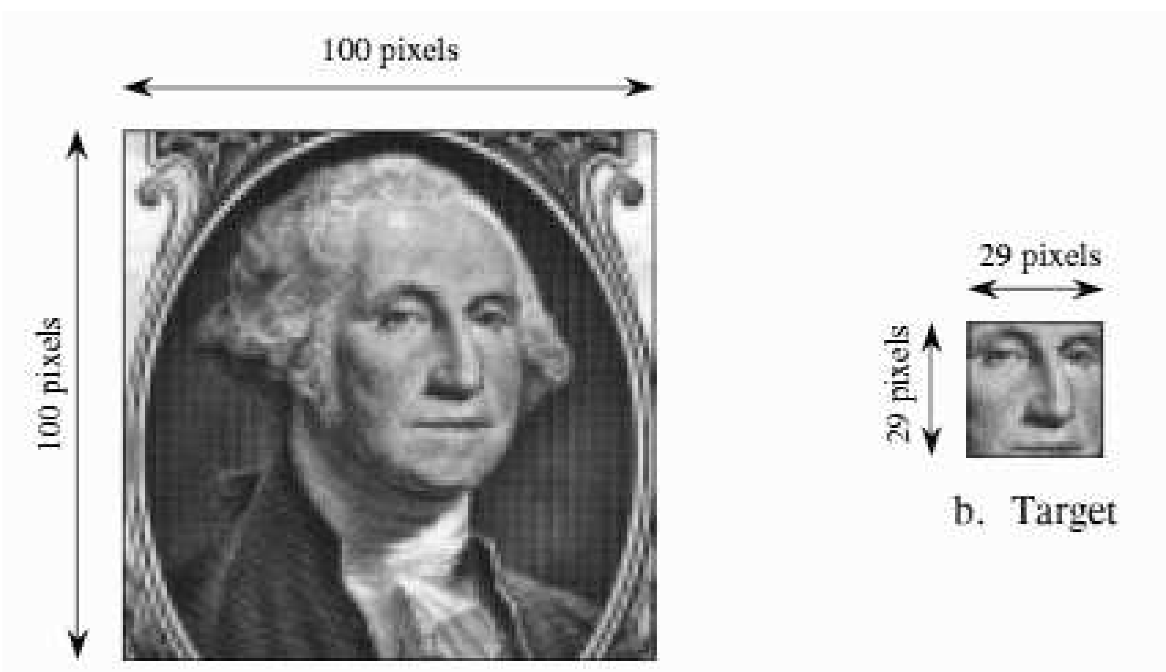
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{S}{N}\right) \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha$$

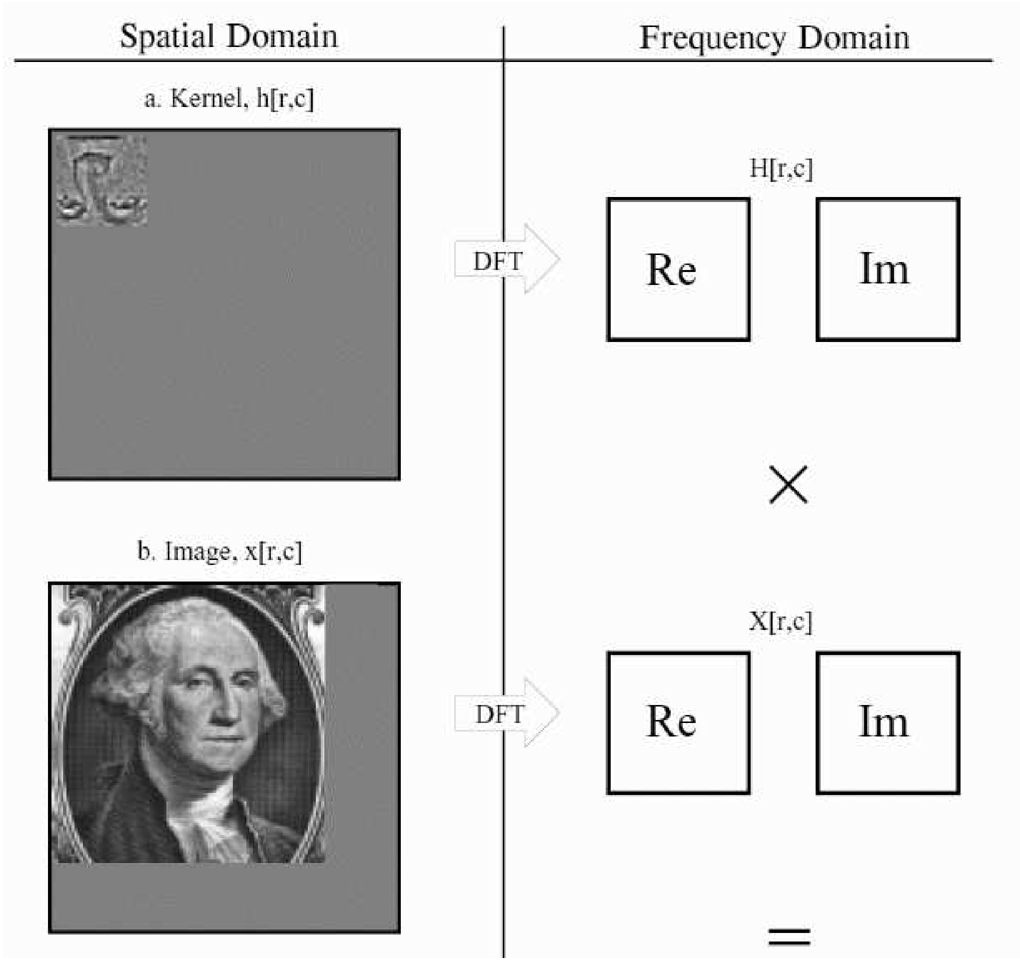
A szélsőérték: $\beta = \alpha \Rightarrow$ az illesztett szűrő a megoldás!

2D-ben is működik az eljárás: 3 frekvencia - pontforrások keresése:

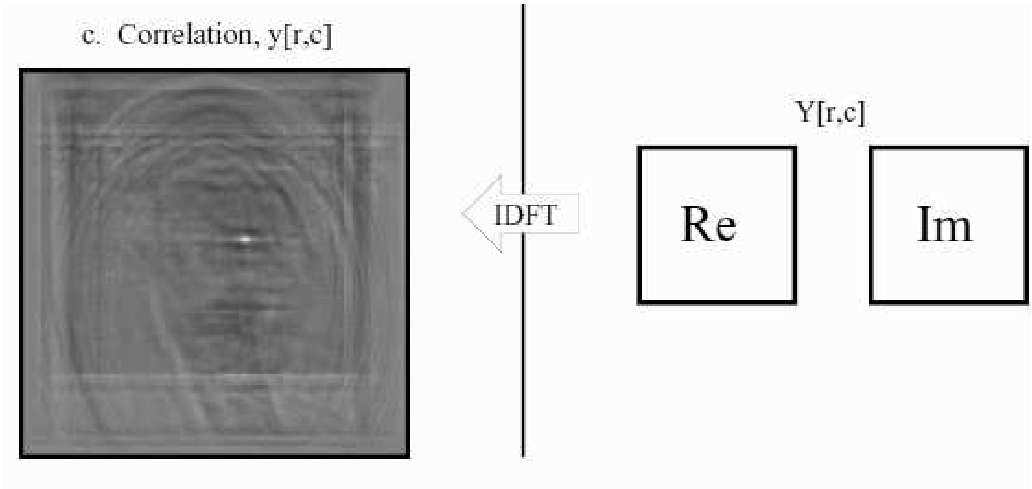


Korreláció vagy illesztett szűrő?

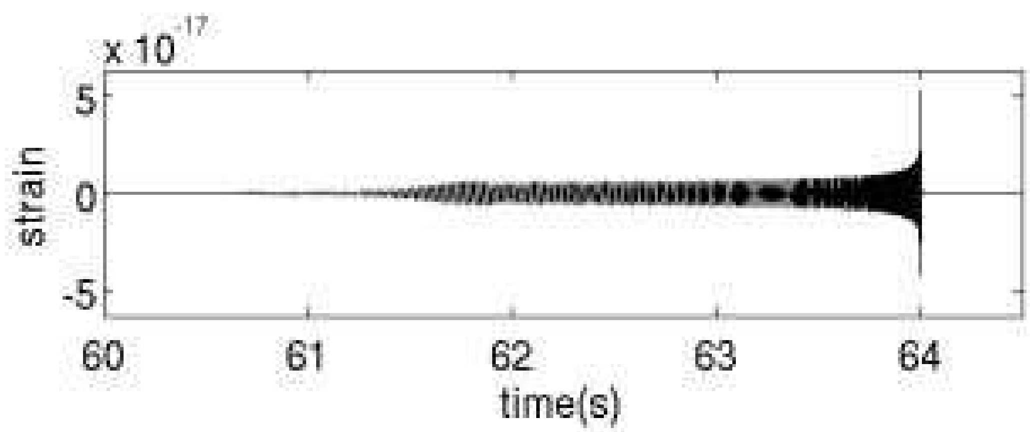


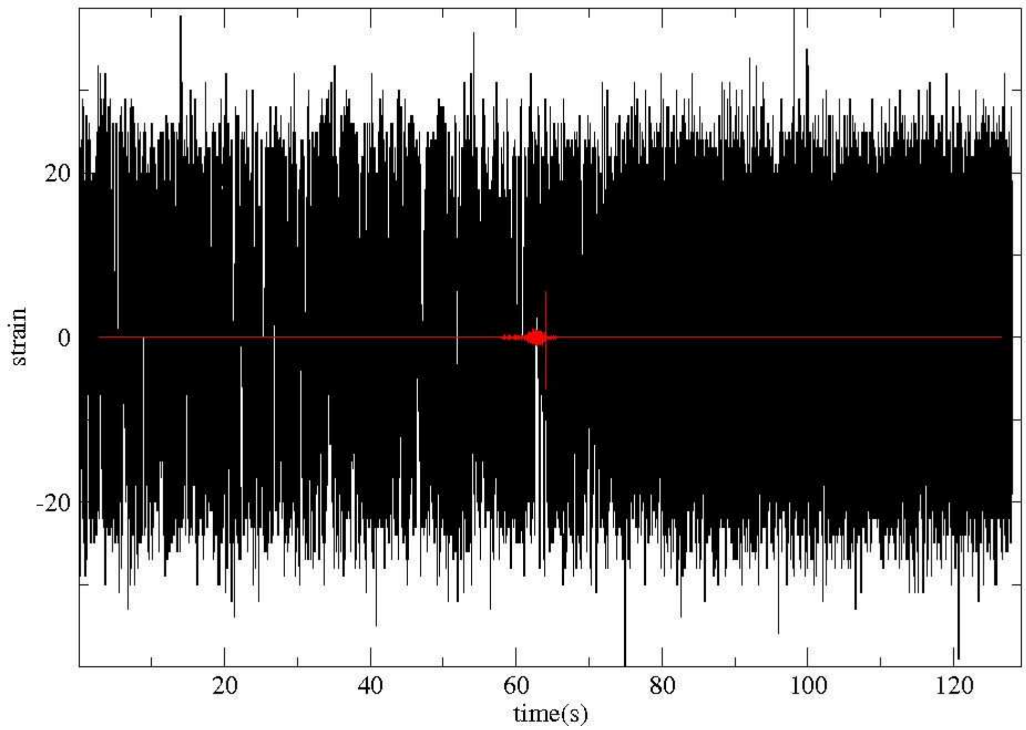


Spatial Domain
Frequency Domain
a. Kernel, h[r,c]
DFT
H[r,c]
Re
Im
×
b. Image, x[r,c]
DFT
X[r,c]
Re
Im
=

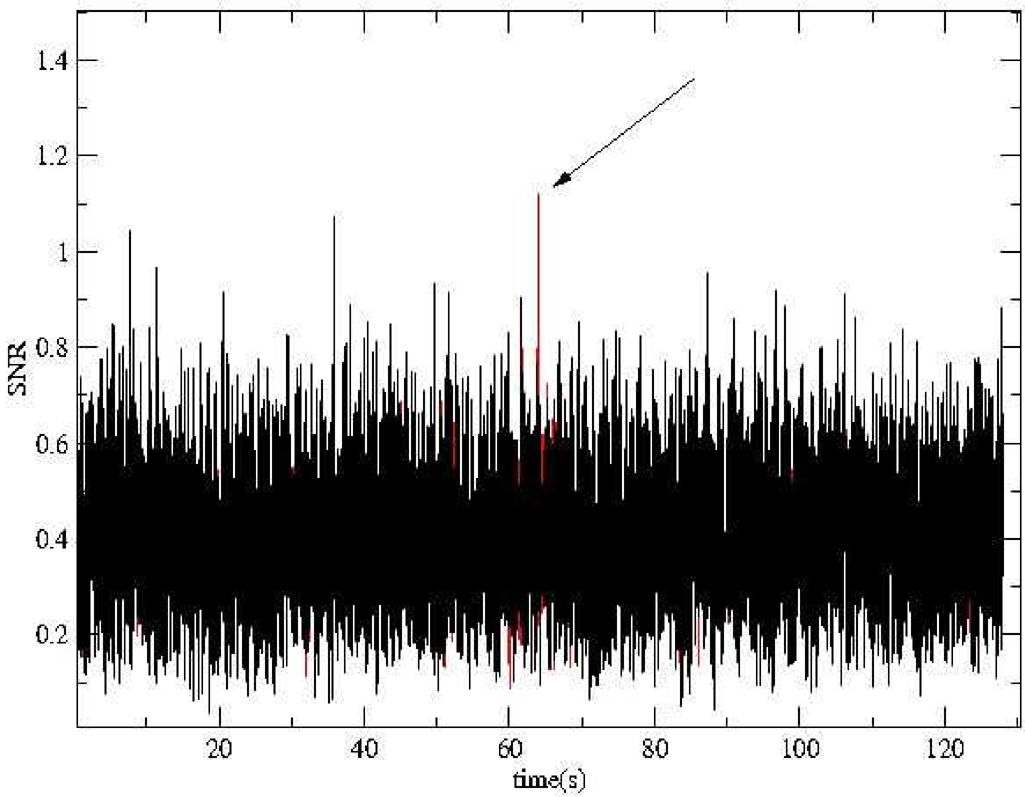


Gravitációs hullámok: első és másodfajú statisztikai hiba.





20
0
-20
strain
20
40
60
80
100
120
time(s)


SNR
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
20
40
60
80
100
120
time(s)

Wavelet transzformáció

Eddig vagy amplitúdó vagy frekvencia leírást követtünk $\delta(t - t_0)$ ill. $\sin x, \cos x$ bázissal.

$\sin x, \cos x$: időbeli eltolás operátorára invariánsak - sajátfüggvények.

Jelek kifejtése ortogonális bázisfüggvények szerint:

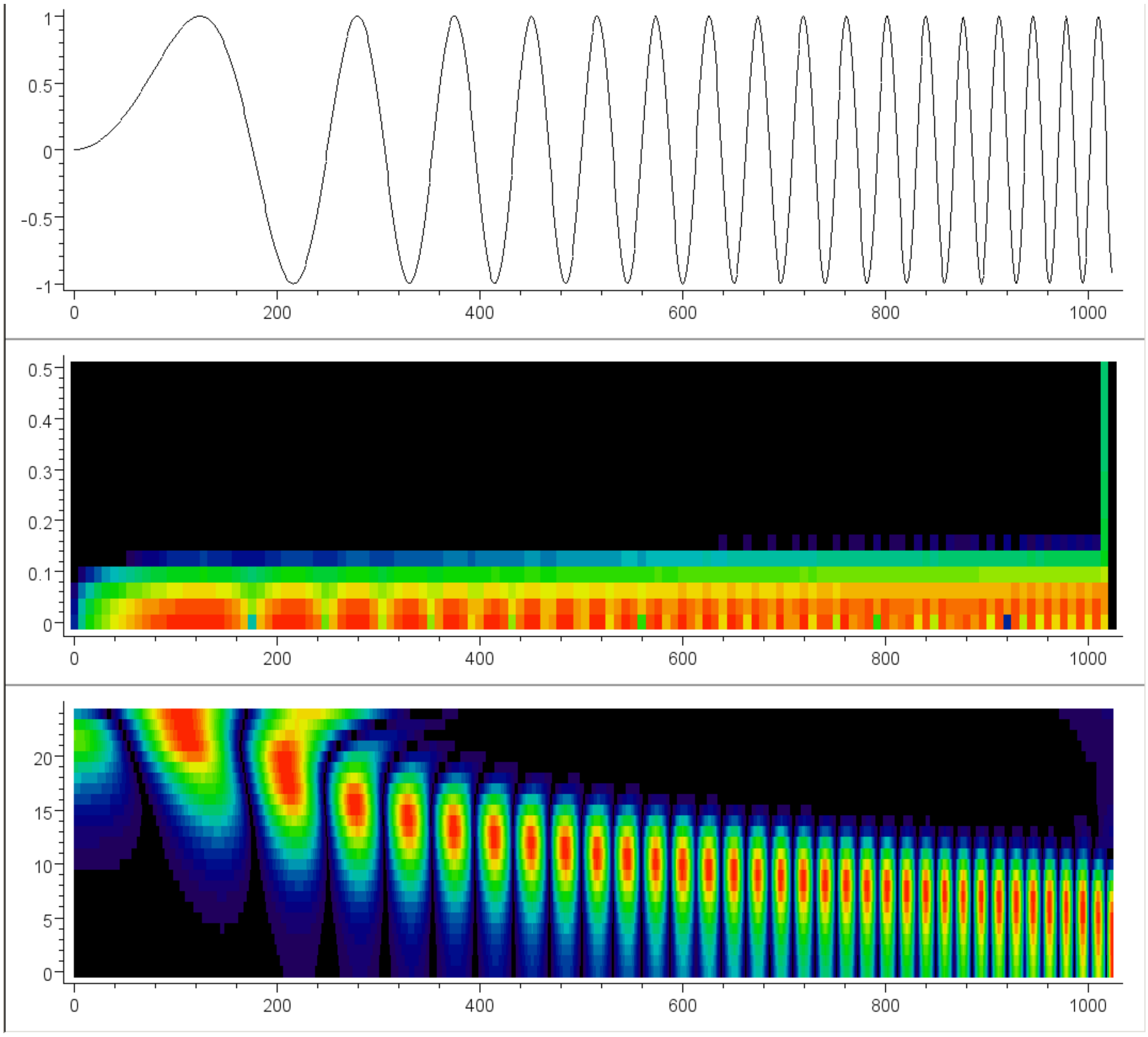
- Dirac-delta $\longrightarrow$ amplitúdó–idő leírás

- $\sin$ és $\cos$ függvények $\longrightarrow$ Fourier leírás

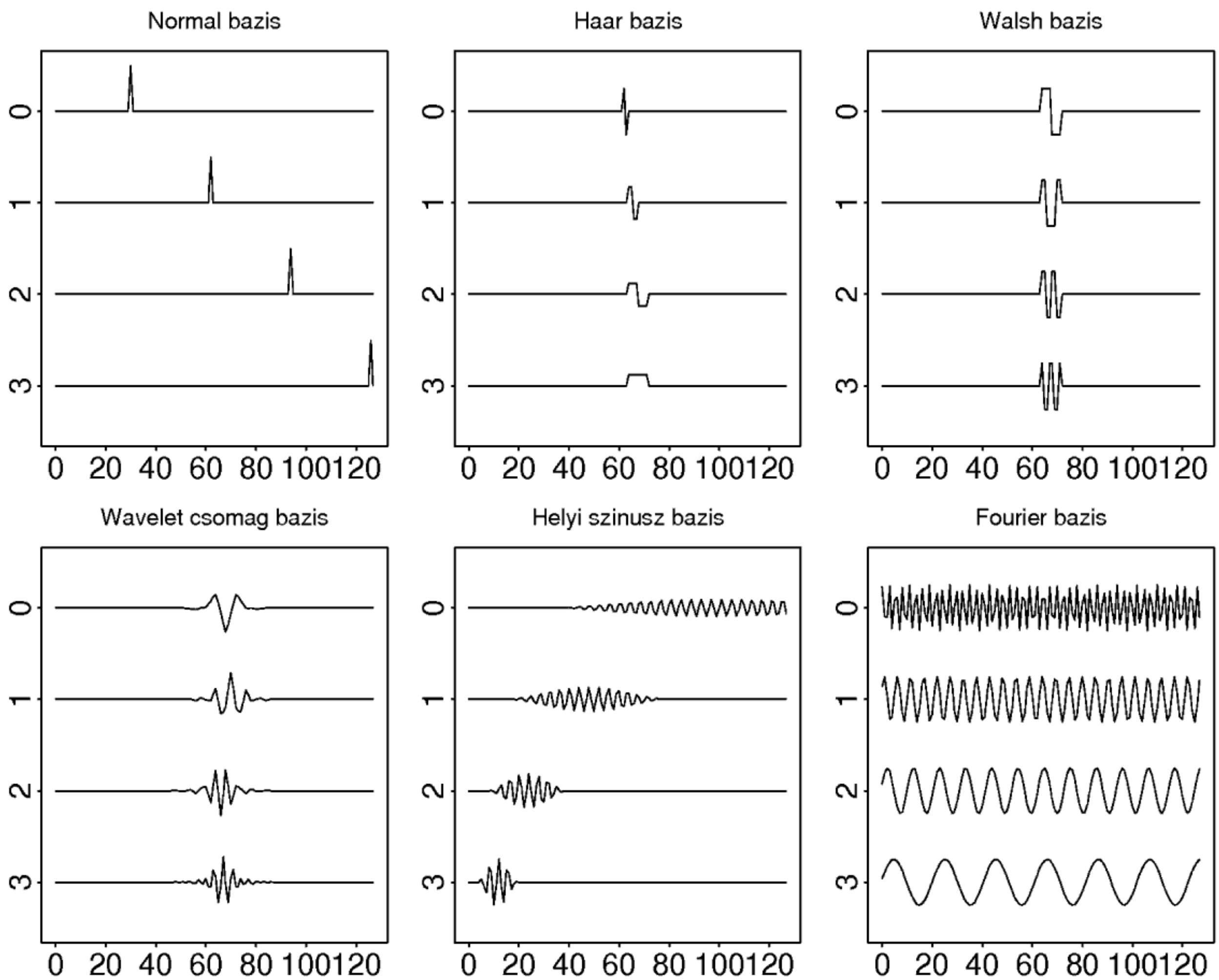
Példák:
- konstans frekvenciájú jel
időben végtelen $\sin$ vagy $\cos$ hullám, de csak egy megadott frekvencián.

- rövid, Dirac-delta jellegű impulzus
Fourier-transzformáltja sok, nagyjából egyezőamplitúdójú $\sin$ és $\cos$ hullám: a fázisok pontosan olyanok, hogy az impulzus előtt és után a hullámok kioltják egymást, de a megfelelő időpontban az impulzus megjelenik!

Időben növekvő frekvenciájú jel:
nem tudjuk egyik térben sem jól leírni (hosszú jelsorozat, széles spektrum).



Lehetséges más felbontás is - tetszőleges teljes bázisvektor-rendszer választható.

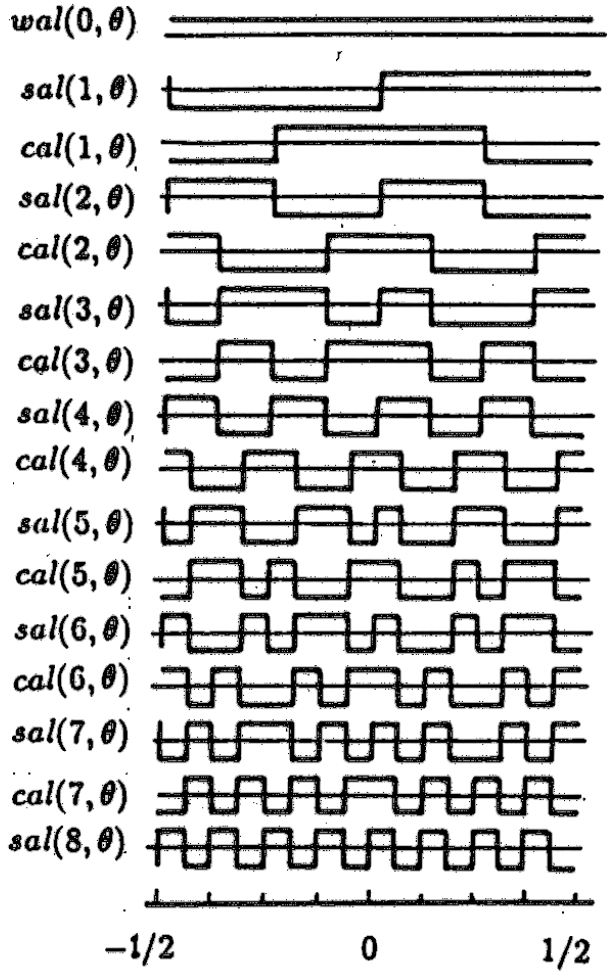


Egy általános bázisvektor-rendszer általában nem TONR rendszer.

Hasznos a (kvázi)-ortogonalitás - a teljesség általában feltétel.
Kvázi-ortogonalitás: a konvolúció komplikált / nem gyorsabb!

Walsh, Haar egyéb függvények - gyorsabb számolás pl. osztályozási problémákhoz, alakfelismeréshez.

Pl. Walsh bázis: $\sin x, \cos x$ előjele, DFT helyett csak összeadás.



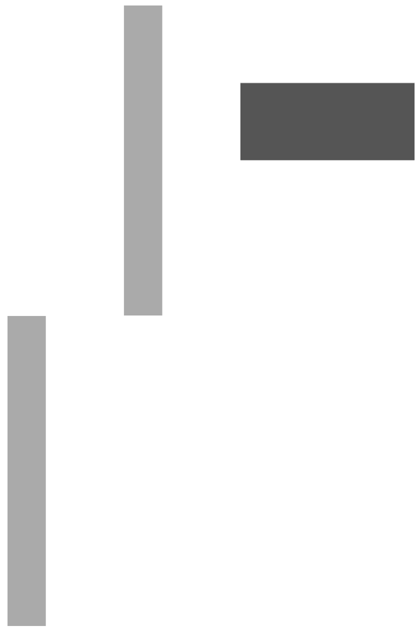
Időben lokalizált bázist is lehet választani - ezt a DFT esetén is megtehetjük: csíkok a frekvencia-idő síkon

$\Delta f \times \Delta t$ méretű cellák.
A mintavételi törvény (legalább 2 minta a legmagasabb frekvenciából) korlátozza a cella minimális méretét (ugyanaz a korlát, mint a kvantummechanikai határozatlansági reláció esetén: a fázistérben FT kapcsolat itt is, ott is).

A szokásos idő- és frekvenciatartománybeli ábrázolás $\longrightarrow$ speciális felbontás, ahol az adott cella egyik irányban végtelen kiterjedésű.

A síkot végtelen lehetséges módon fel lehet bontani a t és f csíkokon kívül!

Waveletek: speciális választás lokalizált cellákkal.
Frekvenciájuk viszonylag jól meghatározott ÉS időbeli (térbeli) helyzetük is korlátozott.
A minimális cellaméret itt is korlátos!



Diszkrét wavelet transzformáció (DWT) :
- rekurzív szűrés
- páros-páratlan tagokra decimálás (FFT algoritmus!)
- gyors FFT-vel összemérhető sebesség

A cellák területe megegyezik!

Daubechies wavelet

Az FFT/DWT forgatás az amplitúdó–idő tér és a frekvencia–idő tér között: mátrixművelet!

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{0\times0} & \omega^{0\times1} & \omega^{0\times2} & \dots & \omega^{0\times(N-1)} \\ \omega^{1\times0} & \omega^{1\times1} & \omega^{1\times2} & \dots & \omega^{1\times(N-1)} \\ \omega^{2\times0} & \omega^{2\times1} & \omega^{2\times2} & \dots & \omega^{2\times(N-1)} \\ & & \vdots & & \\ \omega^{(N-1)\times0} & \omega^{(N-1)\times1} & \omega^{(N-1)\times2} & \dots & \omega^{(N-1)\times(N-1)} \end{pmatrix}$$

(itt $\omega = e^{-2\pi i/N}$)

A DAUB4 wavelet: speciális digitális szűrő

$$\mathbf{D_4} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & & & & \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & & & & & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & & \\ & & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & & & & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ c_2 & c_3 & & & & & & & & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & & & & & & & & c_3 & -c_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ (bemenő) adatokból $\rightarrow$ $\mathbf{y} = \mathbf{D}_4\mathbf{x}$ kimenő transzformált.

$\mathbf{D_4}$ két FIR szűrő:
- páratlan sorok: $c_0, \ldots, c_3$ simítást/integrálás
- páros sorok: $c_3, -c_2, c_1, -c_0$ különbségképzés/deriválás

Legyen a páros sorok kimenete 0 a konstans és a lineáris jelekre
+ legyen a mátrix inverze annak transzponáltja. (digitális szűrő technika:
kvadratúra tükör szűrő) $\rightarrow$ 4 egyenlet, megoldás:

$$c_0 = (1+\sqrt{3})/4\sqrt{2} \qquad c_1 = (3+\sqrt{3})/4\sqrt{2}$$
$$c_2 = (3-\sqrt{3})/4\sqrt{2} \qquad c_3 = (1-\sqrt{3})/4\sqrt{2}$$

A DAUB család többi tagja is hasonlóan generálható:

$$c_0 = (1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \qquad c_1 = (5+\sqrt{10}+3\sqrt{5+2$$
$$c_2 = (10-2\sqrt{10}+2\sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \qquad c_3 = (10-2\sqrt{10}-2\sqrt{5+$$
$$c_4 = (5+\sqrt{10}-3\sqrt{5+2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \qquad c_5 = (1+\sqrt{10}-\sqrt{5+2$$

Asszimetrikus esetek, más paraméter sorrend a mátrixban + más jelekre kirótt 0 feltételek a simításnál: különböző wavelet családok generálhatók.

Diszkrét Wavelet Transzformáció (DWT)

$$\mathbf{D_4} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & & & \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & & & & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & \\ & & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & & \\ c_2 & c_3 & & & & & & & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & & & & & & & c_3 & -c_2 \end{bmatrix}$$

Wavelet mátrix hierarchikus alkalmazása:
1. lépés: teljes $N = 2^n$ adatsorra:
2. lépés: előző lépés simított adatain s.í.t.

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{mátrix}}
\begin{bmatrix} s_1 \\ d_1 \\ s_2 \\ d_2 \\ s_3 \\ d_3 \\ s_4 \\ d_4 \\ s_5 \\ d_5 \\ s_6 \\ d_6 \\ s_7 \\ d_7 \\ s_8 \\ d_8 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{sorbarakás}}
\left[\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{array}\right]
\xrightarrow{\text{mátrix}}
\left[\begin{array}{c} S_1 \\ D_1 \\ S_2 \\ D_2 \\ S_3 \\ D_3 \\ S_4 \\ D_4 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{array}\right]
\xrightarrow{\text{sorbarakás}}
\left[\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \hline d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{array}\right]
$$

Végül: két $\mathcal{S}$ + a $\mathcal{D}$ + D, d wavelet együtthatók

DWT: ortogonális mátrixtranszformációk sorozata $\rightarrow$ a DWT inverze az eljárás megfordításából áll!

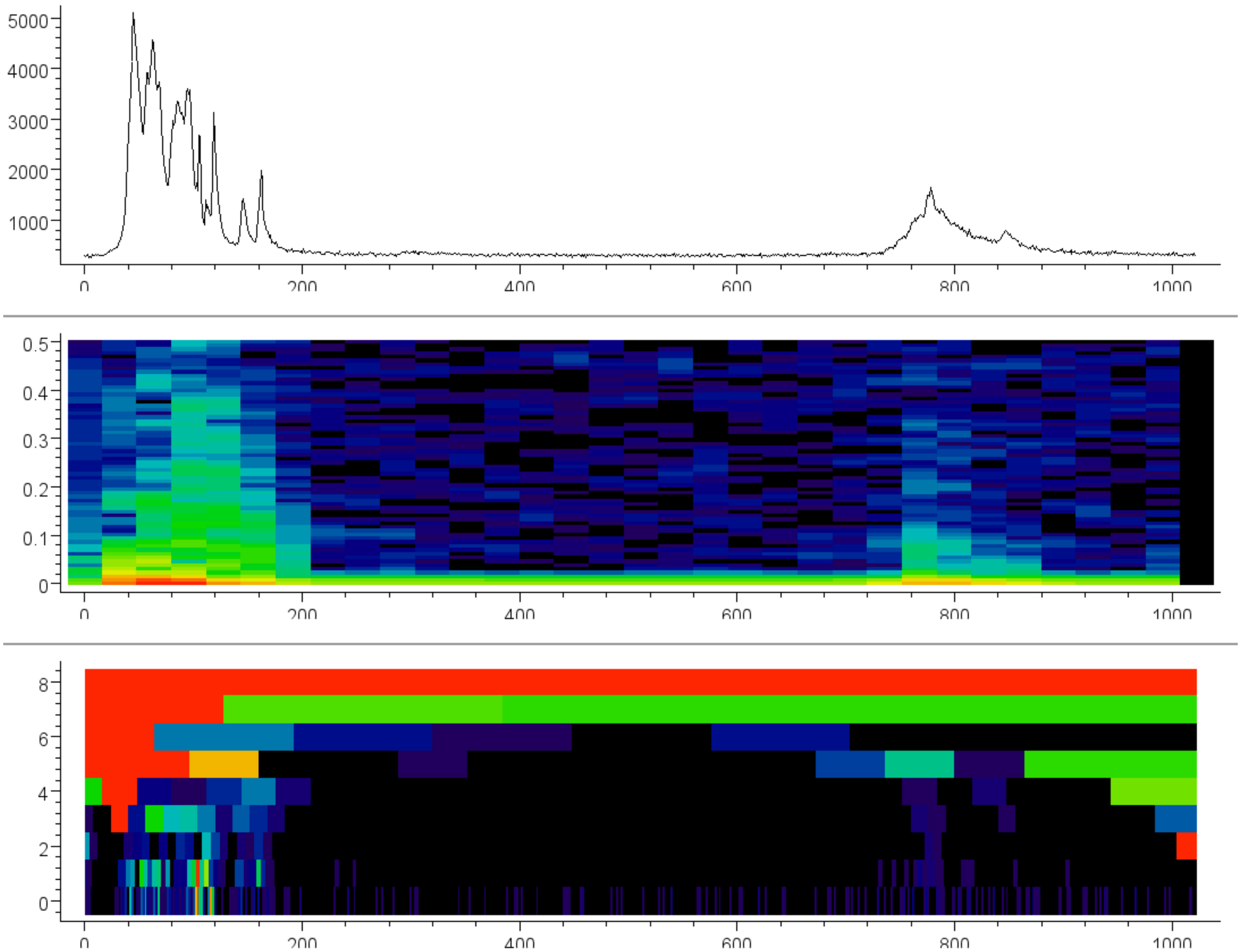
Ez hasonlít az FFT CT-re:

DWT mátrixszorzások $\longrightarrow$ lepkeművelet
simított adatok kiválogatása $\longrightarrow$ FFT rendezés /bit-reverzálás

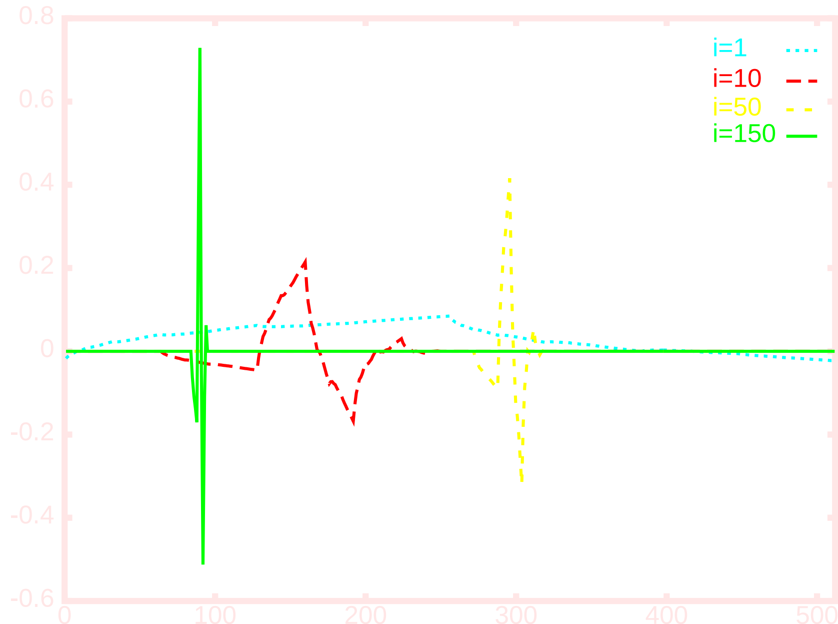
De más, mint az FFT CT:
FFT: minden lépésben 2^n pont
DWT: adatok száma lépésenként feleződik

DWT fázistér: hierarchikusan felépítés
minden lépésben dupla a frekvencia és feleződik a pontok száma (lehetne másképp is, de az nem DAUB).

Alacsony frekvenciák értéke pontos DE nem tudjuk, hogy mikor történik?
Magas frekvenciák értéke pontatlan DE tudjuk, hogy mikor történik!



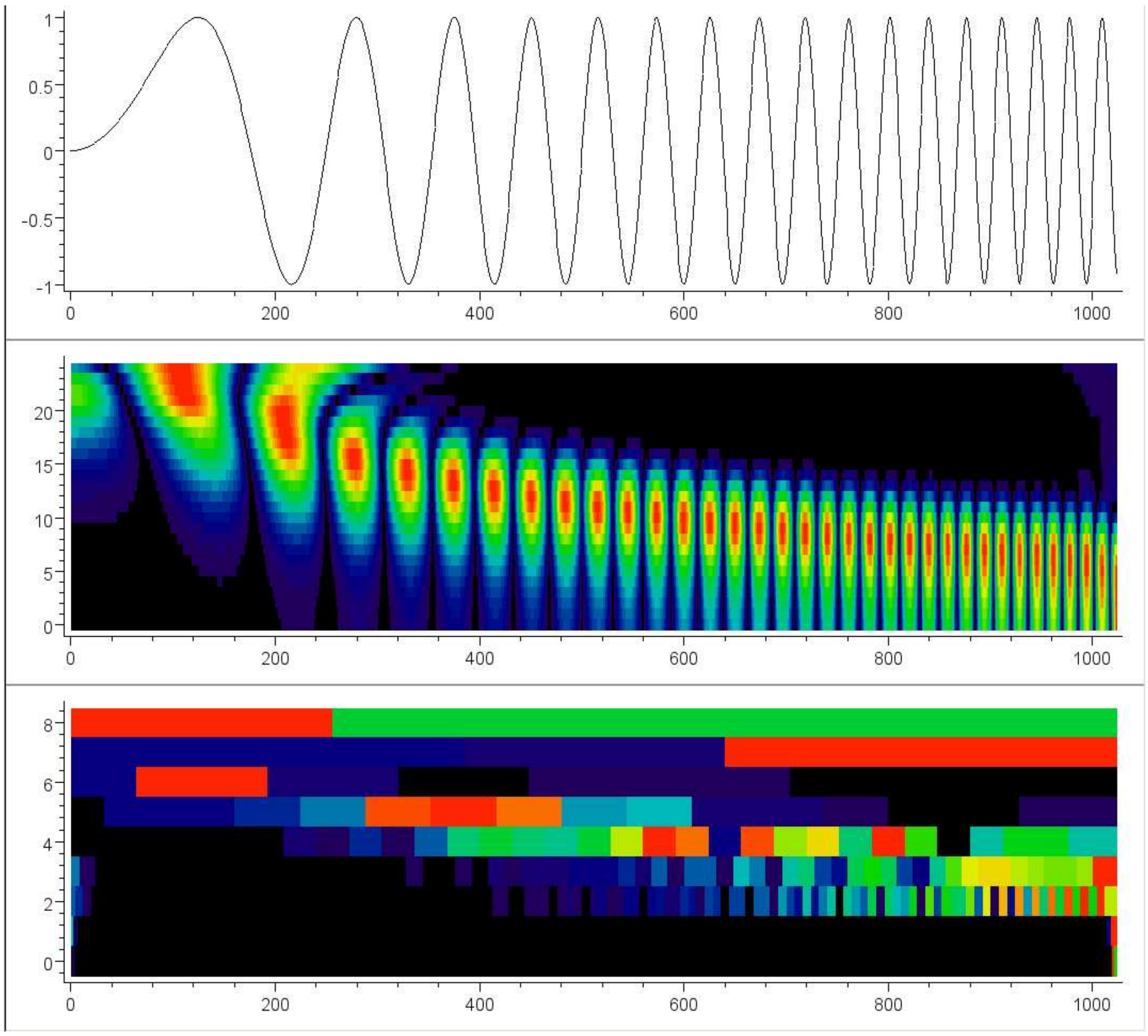
Wavelet függgvény : inverz DWT segítségével megkapható:

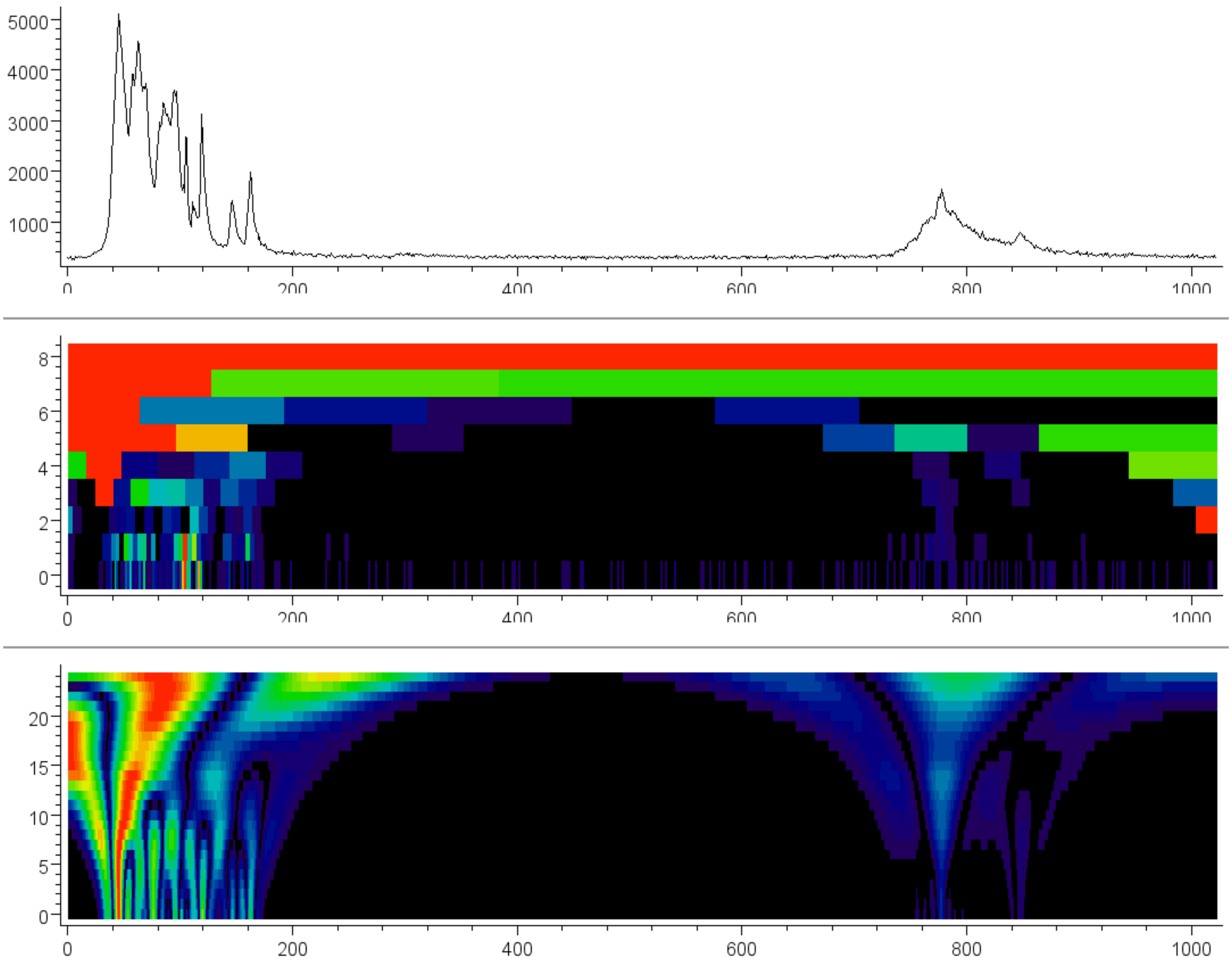


$i = 150$: $(128, 255)$ intervallum,
$x = (150 - 128)/(256 - 128) * 512 = 88$
$i = 50$: $(32, 63)$ intervallum, $x = (50 - 32)/(64 - 32) * 512 = 288$

A DAUB4 deriváltak nem mindenhol folytonosak, a jobb oldali derivált nem mindenhol létezik!

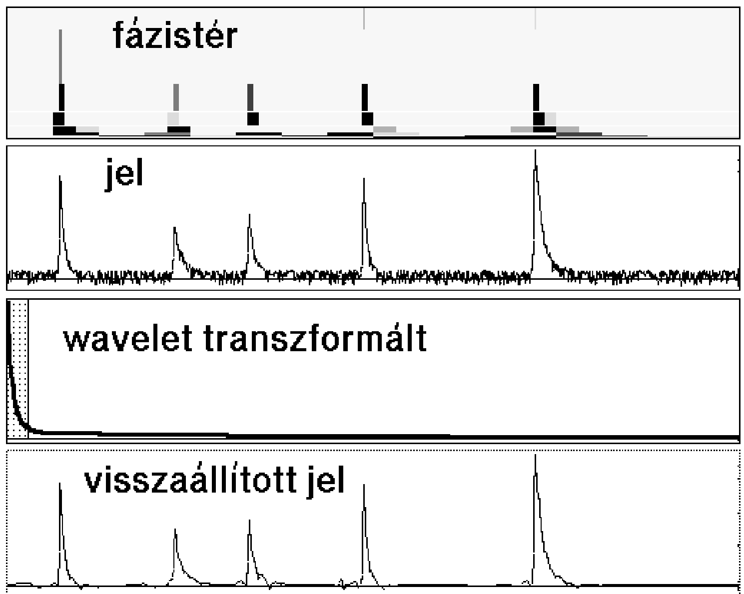
Folytonos eset: a cellák átfedhetnek, a wavelet paraméterek nem függetlenek (pl. osztályozásnál nem okoz gondot).


1
0.5
0
-0.5
-1
0
200
400
600
800
1000
20
15
10
5
0
0
200
400
600
800
1000
8
6
4
2
0
0
200
400
600
800
1000


5000
4000
3000
2000
1000
0
200
400
600
800
1000
8
6
4
2
0
20
15
10
5

Wavelet alkalmazások

exponenciális lefutású impulzusok zajjal:



A fázistérben csak a $512/32$ legnagyobb értéket tartottuk meg.
Rossz zajtömörítés: javul a jel/zaj viszony!

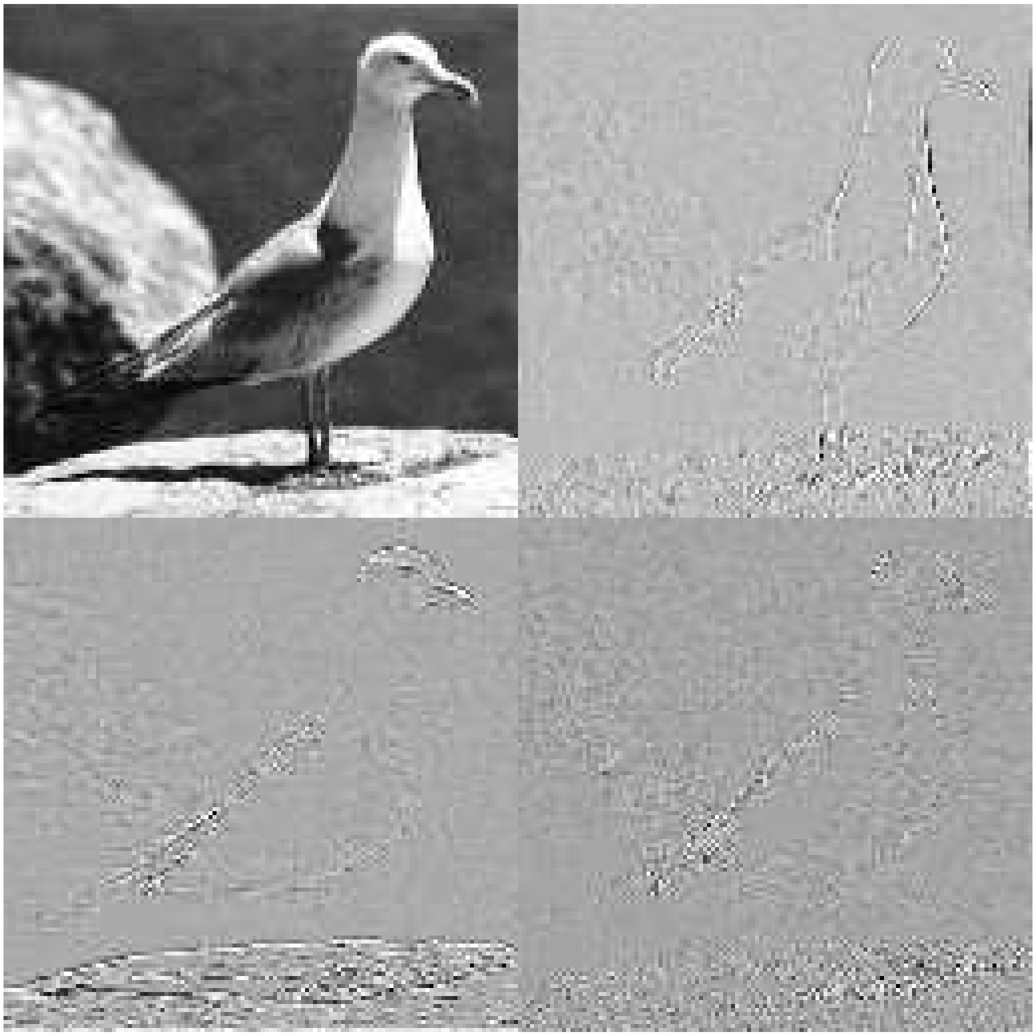
l. W/g1.sh

Veszteséges tömörítés: az amplitúdó és a hely is tárolandó!
Minimax tulajdonság: a wavelet az összes ortonormált bázis közül a Shannon entrópia szerint a *legrövidebb* leírása az adatoknak $\acute{e}s$ a bázisfüggvényeknek!

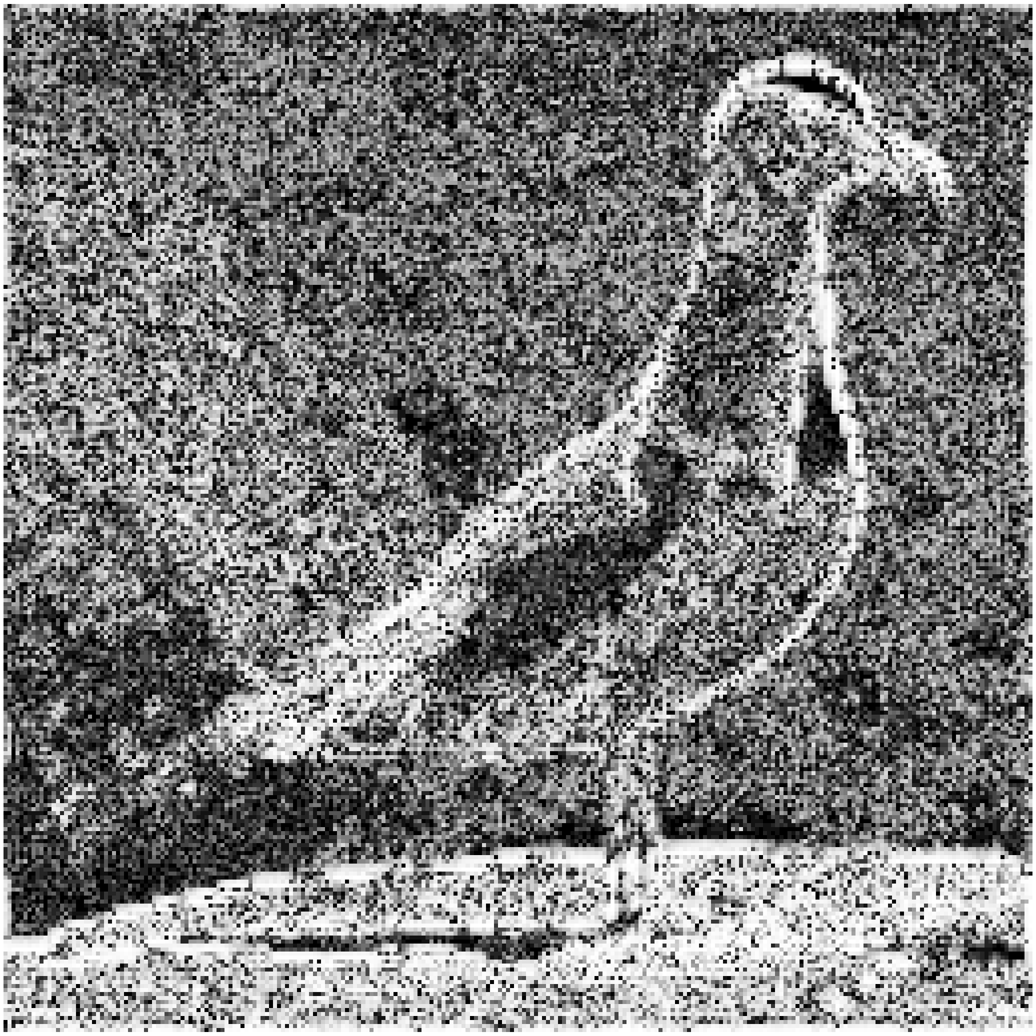
N dimenziós DWT az FFT-hez hasonlóan dimenziónként végezhető.

N=2: képfeldolgozás, ahol az élek megőrzése fontos:
wavelet tömörítés, nagyság szerint válogatott komponensek $\longrightarrow$ kevesebb paraméter, DE nemlineáris! $\longrightarrow$ JPEG tömörítési algoritmusban meghatározó szerep!

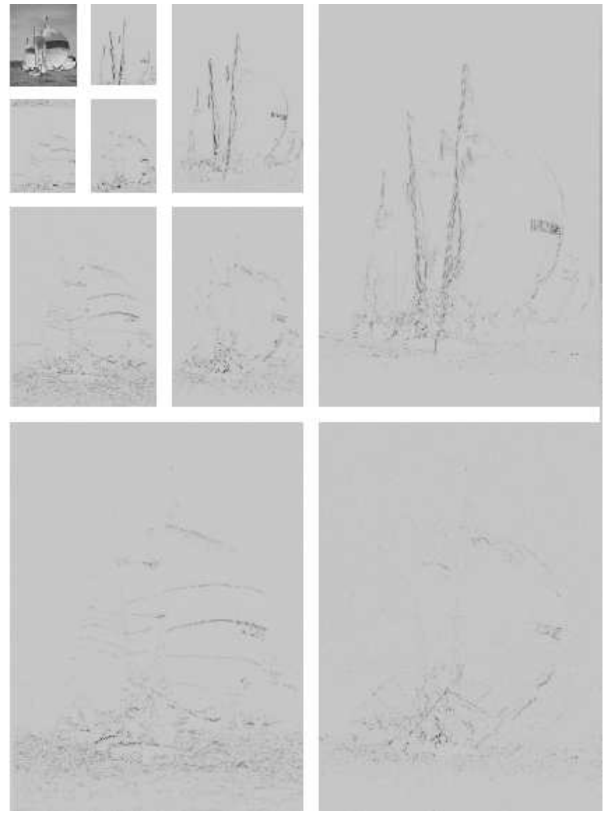
DWT első szintje:

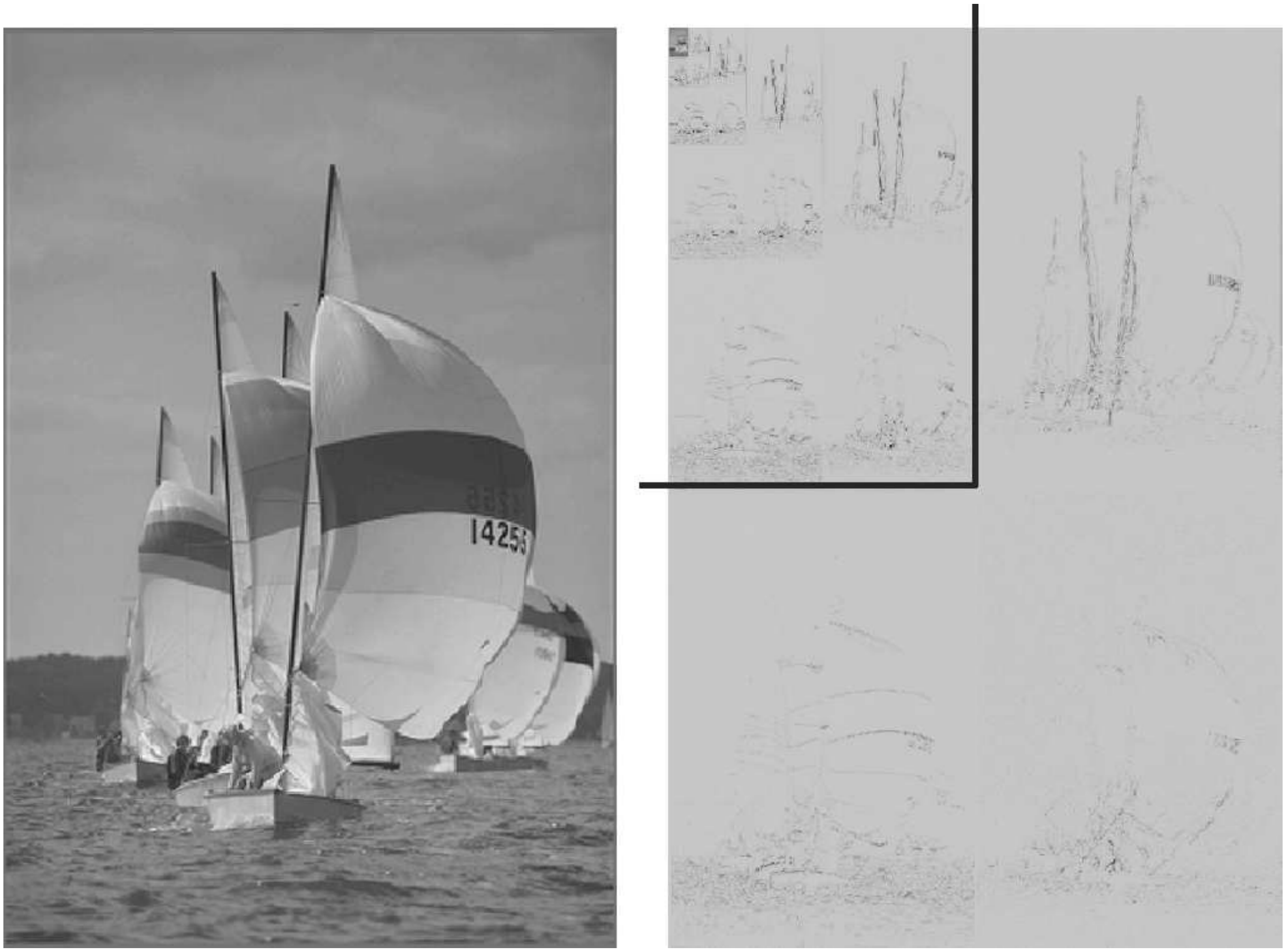


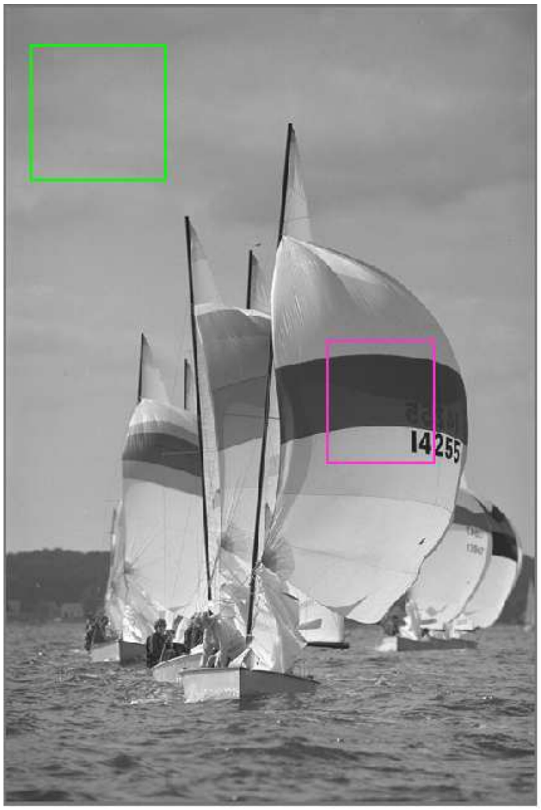
A visszaállított és az eredeti különbsége :



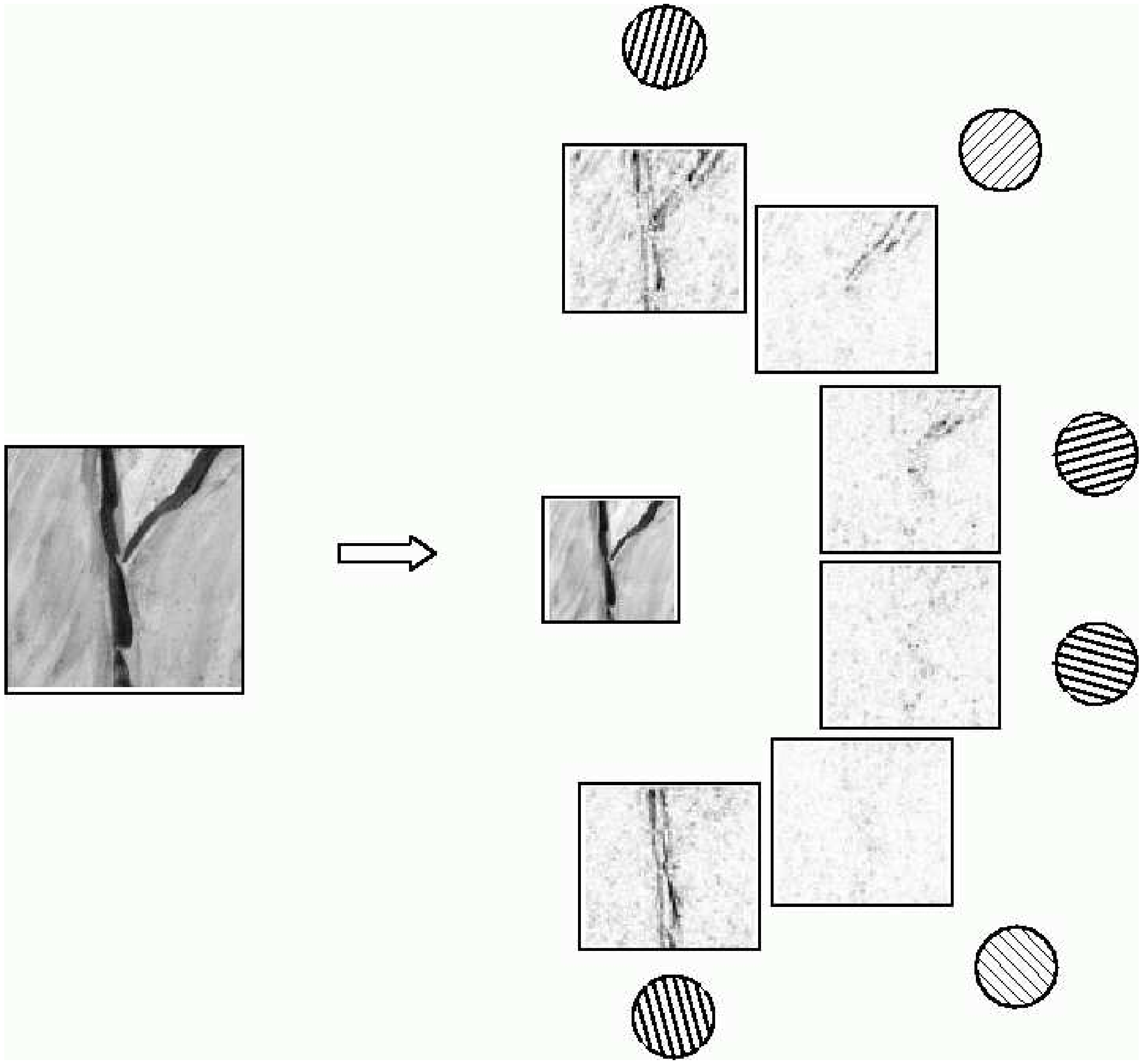

14255

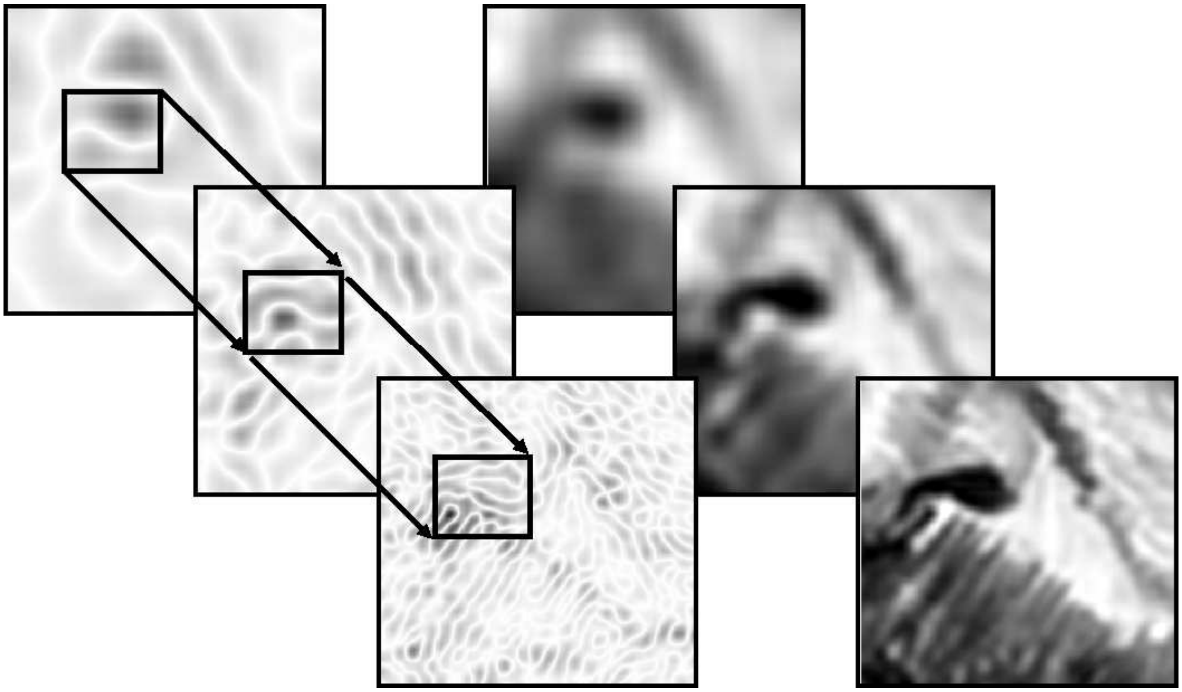






Osztályozás wavelet együtthatókkal:





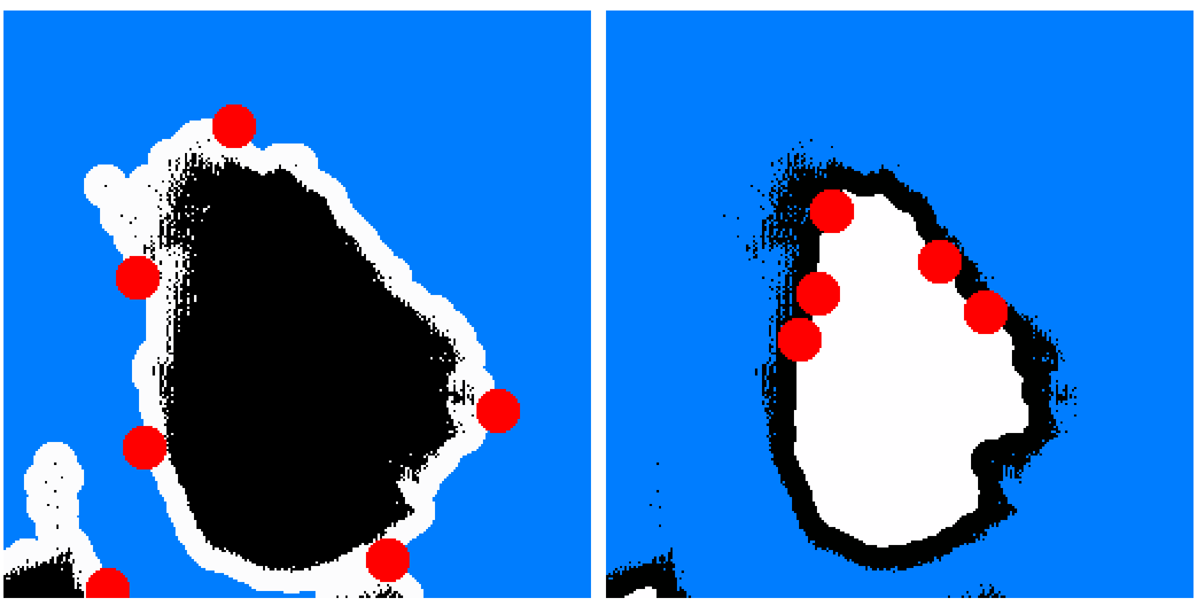
Irány szerinti wavelet információ: klasszifikációs eljárás bemenete. Orvosi, stb. alkalmazások. I. W/avi

Nemlineáris eljárások morfológiai feldolgozás

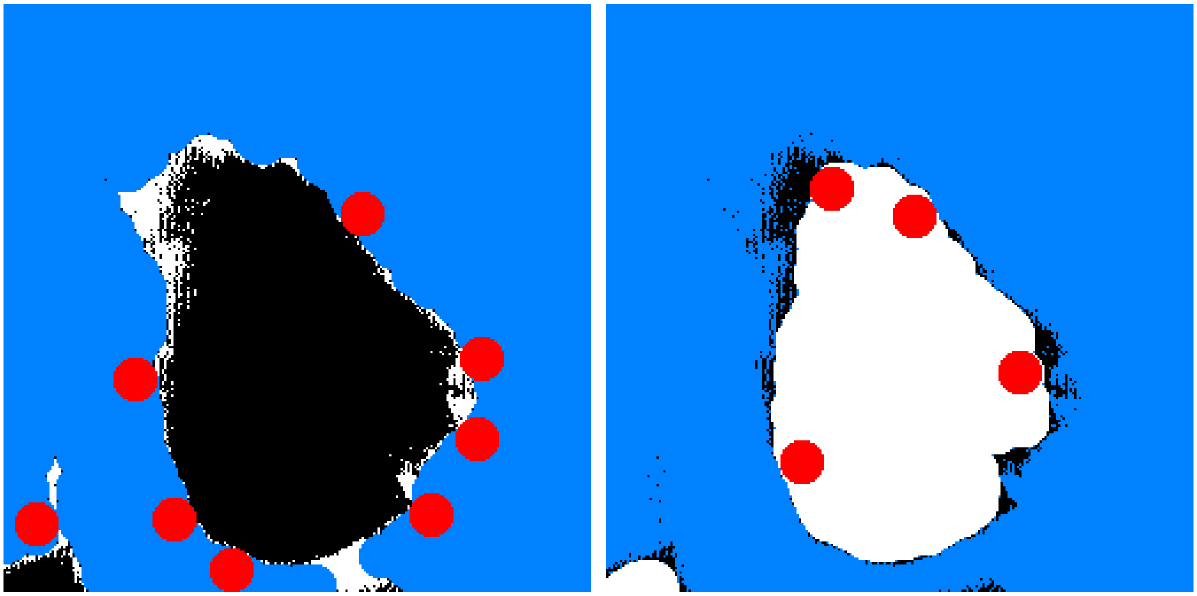
Wavelet amplitúdó vágás: nemlinearitás.

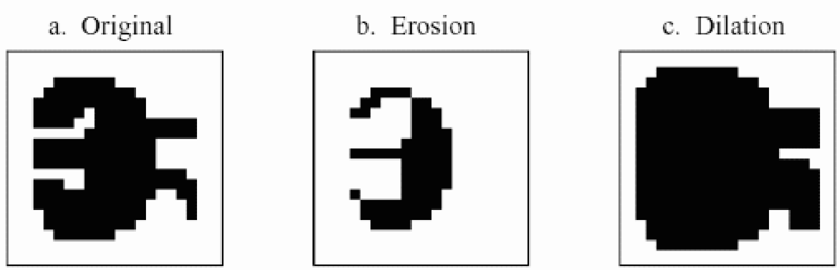
Fekete-fehér kép.

Dilatáció (ha objektummal érintkezik, akkor objektum) és erózió (ha háttérrel érintkezik, akkor háttér):



Zárás (dilatáció, majd erózió) és nyitás (erózió, majd dilatáció):





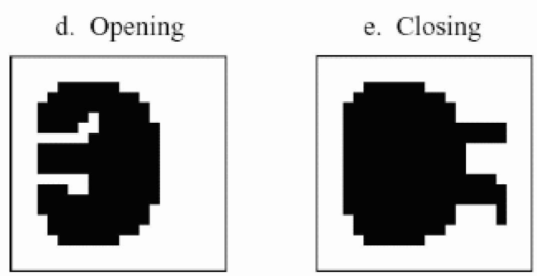


FIGURE 25-10
Morphological operations. Four basic morphological operations are used in the processing of binary images: *erosion*, *dilation*, *opening*, and *closing*. Figure (a) shows an example binary image. Figures (b) to (e) show the result of applying these operations to the image in (a).

a. Original fingerprint b. Skeletonized fingerprint