Kaotikus áramkörök: a Chua-áramkör

A Chua-áramkör az egyszerű kaotikus rendszerek sok szempontból kiemelkedően jó modellje. Ezek közül különösen fontos, hogy a fázistér illetve a dinamika nagy pontossággal definiált, az alkatrészek közel ideálisak az elméleti leírást lehetővé téve, a paraméterek egyértelmű módon, nagy pontossággal változtathatók, és mivel eleve elektronikus rendszerről van szó, a rendszer állapota igen egyszerűen mérhető.

A labormérés célja a rendszernek nem elsősorban elektronikus szempontból való vizsgálata, hanem annak demonstrálása, hogy a különböző mérési módszerek milyen információt szolgáltatnak a rendszerről. A kaotikus rendszerek esetén nagyon sok megközelítés csődöt mond: példa erre a lineáris rendszerek leírására alkalmazható, a fix sajátfrekvenciákat kereső fourier-analízis. Mivel a rendszer a kaotikus tartományban közel „véletlenszerű”, statisztikai módszerek alkalmazásának is létjogosultsága van.

A Chua-áramkör egyik jellemzője, hogy a kontroll-paraméter (az egyik ellenállás értéke) változtatásával a rendszer a periodikus tartományból eljut a kaotikus tartományba, konkrétan a perióduskettőződéses bifurkációk sorozatán keresztül. A mérésben mindkét, eléggé jól elkülönülő tartományt vizsgálni kell, a közöttük való átmenettel együtt.

A mérési feladatok az egyes vizsgálati módszerek köré vannak csoportosítva. Ezek mindegyike olyan, aminek „tökéletes” megoldása túlmutatna a labor keretein. Ez szabadságot is jelent a megoldások során, azaz az inspiratívabb, gyümölcsözőbb módszerek alaposabb kidolgozásával a kevésbé értékesnek tűnő feladatok teljes megoldása kiválható. Ebben a döntés nem kis részben a mérést végző hallgatókra van bízva. Kiemelendő, hogy a rendszer működésének megértése, a módszerek részleteinek kidolgozása is a labormérés feladata, melyet a laborvezetők konzultációval segítenek.

A mérések kisebb része a digitális oszcilloszkóp jeleinek feldolgozásával megoldható. Nagyobb mennyiségű adatrögzítésre, ami a feladatok legtöbbjéhez szükséges, a számítógép hangkártyájának használata ad lehetőséget. Tekintve hogy a modern mérési módszerek általában megkívánják az itt is felmerülő informatikai problémák (adatrögzítés, adatredukció, fizikai analízis) megoldását, ezért az adatfeldolgozó és kiértékelő programok megírása és futtatása mind részét képezik a laborfeladatoknak.

Technikailag a hangkártyával egy .wav típusú fájlt rögzítünk (ami így meg is hallgatható), az ebből adódó számsor már feldolgozható normál programozási technikákkal.

0. feladat. Kvalitatív vizsgálat

Vizsgáljuk a rendszert kvalitatívan! Adjuk meg a teljes kapcsolási rajzot, amit a méréshez ténylegesen használunk (ez változhat kis mértékben egyedi szempontok szerint), illetve a mérési körülményeket! A legfontosabb paraméter az egyik finoman változtatható ellenállás értéke, ezt a továbbiakban *kontroll-paraméter*-ként emlegetjük. Írjuk le, hogy a kontroll-paraméter értékét hogyan lehet pontosan mérni!

Azonosítsuk a fontosabb tartományokat! Hol jelenik meg a periodikus tartomány, illetve a perióduskettőződés? Hányad rendig követhetők szemmel a bifurkációk? Hol jelenik meg a kaotikus viselkedés? Hol jelenik meg a dupla-csavaros (double scroll) folyamat? A kontroll-paraméter mekkora értékéig lehet követni a kaotikus tartományt? Követi-e újra periodikus tartomány a kaotikust? Megjelenik-e intermittens viselkedés?

Magyarázzuk el kvalitatívan, hogy hogy működik az áramkör, illetve hogy mi az oka a kaotikus viselkedésnek! Miért jelenik meg egyáltalán az oszcilláció, azaz miért mozdul el a rendszer a triviális fixpontból? Hogy néz ki kvalitatívan az attraktor a kaotikus tartományban? Mi az oka a jellegzetes duplacsavar (double scroll) alakzatnak?

Hallgassuk meg az áramkör „hangját”! Lehet-e füllel követni a bifurkáció megjelenését a hangszín illetve az alap frekvencia változása alapján?

1. feladat. A rendszer dinamikai paramétereinek meghatározása

Mérjük meg az áramkör lineáris részének jellemző alapfrekvenciáit (a rezgőkör két frekvenciáját) és csillapítását! Ez elvégezhető szinuszos gerjesztéssel vagy impulzusgenerátorral való gerjesztéssel (Dirac-delta szerű gerjesztés).

Mérjük meg a nemlineáris elem karakterisztikáját! Ez egy frekvenciafüggetlen kétpólus, tehát az áram-feszültég karakterisztika mérése elegendő. Írjuk le a mérés módszerét, és határozzuk meg a nemlineáris elem meredekségeit, töréspontjainak helyeit.

2. feladat. A rendszer stabilitása (technikai szempontból)

Vizsgáljuk meg a rendszert a periodikus tartományban több helyen (az első bifurkáció előtt, az első néhány bifurkáció közötti tartomány közepén, illetve valamelyik bifurkációhoz közel is). Ezekben a tartományokban a rendszer elvileg egzaktul periodikus, amit külső zajok rontanak el egy kicsit.

Hangkártyás adatfelvétellel mérjük meg a rendszer jelének Fourier-transzformáltját, és nézzük meg, hogy mennyire élesek a csúcsok! Kommentáljuk, hogy milyen hosszúságú vizsgált adatsor az optimális – ha túl rövid, a frekvencia-felbontás kicsi, ha túl hosszú, akkor a Fourier-transzformáció válik problematikussá. Próbáljunk olyan módszert keresni, amivel a lehető leghosszabb mérés válik feldolgozhatóvá!

Mennyire stabil a rendszer amplitúdója? Mennyire stabil a legkisebb frekvenciás komponens amplitúdója a bifurkációktól távol, illetve közvetlenül a bifurkáció után? Mi az oka annak hogy az amplitúdó stabilitása függ attól hogy hol vizsgáljuk a rendszert?

3. feladat. A perióduskettőződési szekvencia vizsgálata

Vizsgáljuk kvantitatíven a perióduskettőződés lépéseit! Mérjük meg a kontroll-paraméter függvényében a frekvenciaspektrumot kellő pontossággal, elegendően sok helyen (különös tekintettel a bifurkációk közelében zajló gyors változásokra).

Határozzuk meg a fő frekvencia-komponens értékét (folytonosan változik-e a kontroll-paraméter függvényében?)

Határozzuk meg a feleződő frekvencia-komponensek amplitúdójának függését a kontroll-paramétertől! A bifurkáció pontjához képest mért távolság függvényében milyen hatványfüggvény-viselkedést tapasztalunk?

4. feladat. A kaotikus tartomány jellemzői az idő függvényében

Egy periodikus függvényt egyértelműen jellemez a periódusidő; a függvény alakja periodikusan ismétlődik. A kaotikus tartományban a periódusidő minden határon túl növekszik, ami azt jelenti, hogy első ránézésre véletlenszerű lesz a folyamat. Ez természetesen nem igaz, hiszen a dinamika egyértelműen megadja az időfejlődést. A folyamat valójában nem véletlenszerű, de nem is előrejelezhető: ez utóbbi azt jelenti, hogy elegendően hosszú időkülönbséget tekintve egy kezdeti és egy késői mérési pont között, a korreláció eltűnik a kezdeti paraméterek és a késői dinamikai állapot között. Vizsgáljuk a kérdést kvantitatívan!

Definiáljunk alkalmasan korrelációs függvényeket, ami a fázistér jellegzetes pontjainak eléréséhez tartozó időkülönbség eloszlását számszerűsíti! Ez lehet pl a zérus-átmenetek közti időkülönbség, a zérus sebességű pontok közti időkülönbség, illetve ezek kombinációja. Érdemes nem csak egy-, de két dimenziós eloszlást is tekinteni, pl két egymás utáni adott időkülönbség előfordulásának eloszlásfüggvényét. Ez utóbbi azért különösen hasznos, mert jól jellemzi a bifurkációs tartományt: a bifurkálódott, de periodikus tartományban az időkülönbségek eloszlása két egyenlő területű Dirac-delta függvénynek felel meg, de ezek mégsem véletlenszerűek (a kisebb után mindig a nagyobb következik, és fordítva).

A fentieket a kaotikus tartomány elérése előtt és után is vizsgáljuk, azaz figyeljük meg, hogy ez a módszer hogyan segít a kaotikus viselkedés tényének meghatározásában!

A duplacsavaros (double-scroll) struktúra jellemzője, hogy az alsó és a felső csavarodó tartományok között hirtelen vált át a rendszer. Ez a váltás csak a kaotikus tartományban figyelhető meg. Határozzuk meg a double-scroll tartományban a váltásokhoz tartozó időkülönbségek valószínűség-sűrűség függvényét (mind az ellentétes irányú, mind az egyező irányú váltásra).

Megfigyelhetők-e intermittens tartományok? Kvantitatívan ezek hogy jelennek meg? Milyen hosszúságúak a kontroll-paraméter függvényében?

5. feladat. A kaotikus tartomány jellemzői fekvencia-térben

A kaotikus tartományban a periódusidő végtelen, azaz a frekvenciaspektrum nem éles vonalakból áll, hanem egy valós számon értelmezett komplex függvény írja le. Határozzuk meg a frekvenciaspektrum alapján a teljesítmény-spektrumot (ismét a kontroll-paraméter függvényében, néhány jellegzetes értéknél)! Folytonos-e a teljesítmény-spektrum? Ábrázoljuk a frekvenciaspektrum fázisának értékét a frekvencia függvényében! Miért nem kapunk egyértelműen folytonos függvényt? Milyen a diszkrét Fourier-transzformált spektrum két egymás melletti értéke közti fáziskülönbség eloszlása? Miért, vagy miért nem egyenletes ez a fáziskülönbség-eloszlás?

A fentieket a kaotikus tartomány elérése előtt és után is vizsgáljuk, azaz figyeljük meg, hogy ez a módszer hogyan segít a kaotikus viselkedés tényének meghatározásában!

Hogyan lehet intermittens tartományok jellemzőit számszerűsíteni a teljesítmény-spektrum alapján?

(Megjegyzés: a 4. és 5. feladat mint látható kapcsolatban áll egymással, érdemes kommentálni a különböző módszerekkel végzett megfigyelések közötti összefüggéseket; pl mennyire hatékony az adott vizsgálati módszer az adott kérdést illetően).

6. feladat. A kaotikusság mértékének számszerűsítése

Az, hogy ,,mennyire kaotikus” a folyamat, nem számszerűsíthető egyszerűen. Valamilyen értelemben azt érdemes vizsgálni, hogy mennyire nem periodikus a rendszer. Külső zajok sajnos akkor is elrontják a periodikusságot, ha a dinamika még a periodikus tartományban van.

A periodikusságot jól jellemzi, hogy mennyire ,,vonalas” vagy ,,folytonos” a teljesítmény-spektrum. Ezt a spektrum információtartalmával érdemes jellemezni: az adott hosszúságú adatfelvételből származó, egységnyire normált területű teljesítmény-spektrum Shannon-féle információtartalmát meghatározhatjuk a kontroll-paraméter függvényében.

Hogy változik az információtartalom? Mérjük meg ezt a függvényt, és figyeljük meg változását! Hogy jelennek meg a bifurkációk, hogy jelenik meg a kaotikus tartomány? Észrevehető-e a duplacsavaros tartományba való átlépés? Hogyan változik adott esetben az információtartalom a kaotikus tartományon belül? Ha hasznosnak tűnik, érdemes bizonyos helyeken finomabb lépésekben mérni – ennek optimális kivitelezése a labormérés feladatai közé tartozik (a két laboralkalom közötti idő lehetőséget ad a hiányzó, a második laboralkalmon begyűjthető adatok felmérésére).

A kaotikusságot jól jellemzi a Ljapunov-exponens. Lehet-e ennek értékéről mondani valamit az adatok alapján, egy jellegzetesen kaotikus pontban?

Irodalom:

Robust op-amp realization of Chua's circuit (chaoscircuit.pdf)
wikipedia.org -> Chua's circuit (http://en.wikipedia.org/wiki/Chua's_circuit)
Scrollcircuitmodel.pdf